# Über eine von J. L. Lagrange gegebene trigonometrische Interpolationsmethode und deren Anwendung auf Kosmophysik

Von der K. Technischen Hochschule zu München zur Erlangung der Würde eines **Doktors der Technischen Wissenschaften** genehmigte Dissertation

ACAD. LUGD. BAT BIBL.

Vorgelegt von

**Julius Schulz**

aus Nürnberg, gepr. Lehramtskandidat für Mathematik und Physik

Annahme der Dissertation: 12. Juli 1912

Referent: Prof. Dr. Heinrich Burkhardt

Korreferent: Prof. Geh. Rat, Dr. W. Ritter v. Dyck

Leipzig und Berlin
Wilhelm Engelmann
1913

Sonderabdruck aus: »Gerlands Beiträge zur Geophysik«. Bd. XIII, 1. u. 2. Heft

Meinem verehrten Freunde und Gönner

Herrn **Friedrich Reifert**

in Dankbarkeit gewidmet

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546317_0103

## Literatur.

Œuvres de J. L. Lagrange. VI. Paris 1873.
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 10. Band. 2. Heft. Bericht von Dr. H. Burkhardt. Leipzig 1908.
Astronomische Mitteilungen, gegründet von Dr. Rud. Wolf, herausgegeben von A. Wolfer. Separatabdruck aus der Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrgang 47, 1902.
Proceedings of the Tokyo Mathematical-Physical Society. II. Series 3. 1906—1907.
Handbuch der Geophysik von Dr. Siegmund Günther. Stuttgart 1897.

Für viele Gebiete der tellurischen wie der kosmischen Physik wäre im höchsten Maße eine sichere Methode erwünscht, die es gestatten würde, zu entscheiden, ob eine gegebene Serie von Beobachtungen dort sich durch eine Summe von einfachen periodischen Funktionen der Zeit (oder überhaupt einer unabhängigen Variablen) darstellen läßt, oder gegebenenfalls die Unmöglichkeit einer derartigen Darstellung (mit einer nicht zu großen Zahl von einzelnen Bestandteilen) festzustellen.

Eine theoretisch einwandfreie derartige Methode ist schon vor 140 Jahren von Lagrange gegeben worden, wohl mit der Absicht, sie zur Darstellung der sogenannten Störungen in der Planetenbewegung zu benutzen; doch hat er sie nur auf ein einziges Beispiel, die sogenannte „Zeitgleichung“ angewandt, aus dem sich über die praktische Brauchbarkeit kein sicherer Schluß ziehen läßt. Eine weitere in Aussicht gestellte Anwendung auf die Bewegung des Halleyschen Kometen wurde nicht mehr ausgeführt, sei es, daß die Methode ihm

selbst nicht das zu leisten schien, was er sich von ihr versprochen hatte, sei es, daß die gerade in jenen Jahren sich vollziehende rasche Fortentwicklung der analytischen Störungstheorie sie ihm als überflüssig erscheinen ließ. Es schien daher nicht ohne Interesse zu sein, sie auch an andern Beispielen auf ihre praktische Brauchbarkeit zu prüfen.

Die von Lagrange gegebene Methode beruht im wesentlichen darauf, daß jede Reihe, deren allgemeines Glied die Form $x^m \cdot \sum_\nu A_\nu \sin(a_\nu + m\alpha_\nu)$ hat, als eine rekurrente Reihe betrachtet werden kann. Diese rekurrente Reihe läßt sich aus einer rationalen gebrochenen Funktion, dem sogenannten „erzeugenden Bruch" entwickeln. Dieser Bruch kann, wenn eine genügende Anzahl von Gliedern der Reihe gegeben ist, durch ein Kettendivisionsverfahren abgeleitet werden. Ist umgekehrt der erzeugende Bruch gegeben, so lassen sich aus seiner Zerlegung in Partialbrüche die einzelnen Bestandteile des allgemeinen Gliedes $T^{(m)} = \sum A_\nu \sin(a_\nu + m\alpha_\nu)$ ableiten.

Dieses allgemeine Glied ist indessen nur dann genau zu bestimmen, wenn die vorzunehmenden Kettendivisionen restlos abbrechen. Das ist aber in praktischen Fällen nur sehr selten der Fall. Es ergeben sich vielmehr in der Regel Reste, deren Koeffizienten zwar klein, aber nicht Null sind.

Unter diesen letzten Resten ist dann gewöhnlich einer, dessen Koeffizienten oft erheblich kleiner ausfallen als die entsprechenden Koeffizienten der andern Reste. Da nun zur Berechnung der Periodenwinkel $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ und damit der Perioden selbst, nur die Ergebnisse einer Kettendivision notwendig sind, so ist es klar, (was übrigens noch besonders untersucht wurde) daß die relativ genauesten Perioden aus den Ergebnissen der Kettendivision mit den kleinsten Koeffizienten des letzten Restes erhalten werden. Zur Bestimmung der Phasenwinkel und Amplituden sind noch die Ergebnisse einer zweiten Kettendivision heranzuziehen. Daher kommt es, daß in den meisten praktischen Fällen nur die Perioden, nicht aber die Phasen und Amplituden mit hinreichender Genauigkeit erhalten werden können. Die Lagrangesche Methode beantwortet somit nur die Frage nach der Periodizität eines Systems gegebener Zahlen ziemlich vollständig.

Lagrange gibt in seiner ersten Darstellung (Œuvres VI) drei Modifikationen ein und derselben Methode an. Ich habe nur die dritte Modifikation näher verfolgt. Sie steht den beiden ersten in bezug auf ihre Güte ebenbürtig zur Seite, ist aber in der Anwendung

erheblich kürzer. (Die vorzunehmenden Rechenoperationen betragen etwa nur die Hälfte der bei der ersten und zweiten auszuführenden Operationen.) Lagrange zieht auch in der Rechnung die dritte Modifikation vor; er sagt, daß sie die Vorteile der beiden ersten in sich vereine. Das einzig Umständliche an der Methode ist ihre Erklärung, was mit dazu beigetragen haben mag, daß sie wenig bekannt geworden ist. Die dritte Modifikation hängt mit der ersten und zweiten zusammen und Lagrange hat auch die dritte aus der ersten und zweiten herausentwickelt. Man braucht das aber nicht zu tun, vielmehr läßt sich die dritte für sich entwickeln, wodurch man verschiedene Abkürzungen der ganzen Erklärungsweise erreichen kann.

Im I. Teil meiner Abhandlung habe ich hauptsächlich aus diesem Grunde die Methode in Kürze wiedergegeben. Es gelang mir manche langwierige Transformation, die zur Erklärung der ersten und zweiten Modifikation notwendig war, zu umgehen und auch sonst eine etwas übersichtlichere Darstellung zu schaffen.

Daran anschließend habe ich im II. Teile an bekannten Beispielen gezeigt, wie sich die Methode bei praktischer Anwendung bewährt. Ich wählte der bequemeren Rechnung halber verhältnismäßig einfache Funktionen, rechnete aus ihnen mehrere Funktionswerte und operierte mit den so erhaltenen Zahlen in der vorgeschriebenen Weise. Im ersten Beispiele, wo mit einer möglichst einfach gebauten Funktion zuerst einige allgemeine Gesichtspunkte für die Anwendungsmöglichkeit der Methode gewonnen wurden, dann im dritten Beispiel gelang es mir aus 11 Funktionswerten die Funktion selbst mit großer Genauigkeit wieder zu erhalten. Beim zweiten Beispiele erhielt ich durch die Methode eine einfachere Funktion als die, aus der die Funktionswerte gerechnet waren. In dem Intervalle der zur Rechnung benutzten Zahlen war aber, wie eine Prüfung der erhaltenen Formel zeigte, eine recht gute Übereinstimmung in den Werten beider Ausdrücke vorhanden. Es zeigte sich also, daß man die „einfachste“ Funktion der betrachteten Art, die in dem betreffenden Intervalle die gegebenen Werte liefert, durch die Lagrangesche Methode erhält. Allerdings muß noch erwähnt werden, daß die Übereinstimmung mit den ursprünglichen Funktionswerten keine so gute war wie im 1. und 3. Beispiele. Das kam daher, weil in diesem 2. Beispiele die kleinste Periode ganz erheblich größer war als das Intervall, dem die benutzten Funktionswerte angehörten. In einem solchen extremen Falle ist eine genaue Bestimmung der Perioden überhaupt nicht gut möglich. Das liegt aber nicht an der Methode, sondern in der Natur der Sache.

Im 2. Beispiel wurde auch eine für die ganze Entwicklung wichtige Frage entschieden. Dort ergab eine vorgenommene Division einen Rest, der zwar so klein war, daß er mit Berechtigung vernachlässigt werden durfte. Indessen war es interessant zu erfahren, was die Methode ergibt, wenn man das Divisionsverfahren noch einen Schritt weiterführt. Da zeigte sich nun, daß man dann statt besserer Resultate schlechtere erhält. Damit hat man für nichtaufgehende Kettendivisionen einen neuen Anhaltspunkt gewonnen, an welcher Stelle die Division am besten abgebrochen wird. Wenn nämlich die möglichen Fehler in den Koeffizienten des Restes größer als diese Koeffizienten selbst werden, kann es fehlerhaft sein, die Division weiterfortzusetzen. Die möglichen Fehler sind in jedem einzelnen Falle zu bestimmen. — Es zeigte sich ferner, daß von den verschiedenen ausgeführten Kettendivisionen immer diejenige die genauesten Perioden liefert, welche die kleinsten numerischen Werte in den Koeffizienten des letzten Restes aufweist. Eine besondere Rolle spielt dabei der erste Koeffizient.

Diese Erkenntnisse machten dann im III. letzten Teile die Behandlung des Sonnenfleckenproblems mit gutem Erfolge möglich. Das Material zur Rechnung entnahm ich den „Astronomischen Mitteilungen" gegründet von Dr. Rudolf Wolf (vgl. Literaturangabe). Mit den dort angegebenen „ausgeglichenen Relativzahlen" der Jahresmittel, deren Ergänzung bis auf neueste Zeit einer gütigen privaten Mitteilung von Herrn Professor Wolfer in Zürich zu danken ist, wurde immer 2 Zahlen überspringend, (also ohne weitere Mittelbildung!) gerechnet. Es zeigte sich dann, daß es zweckmäßig war, die Divisionen nicht öfter als viermal vorzunehmen. (Ich habe übrigens zum Überfluß die Kettendivisionen noch weiter fortgesetzt und gefunden, daß die Koeffizienten der alsdann auftretenden neuen Reste in der Mehrzahl größer sind, als die Koeffizienten der Reste nach den 4. Divisionen.) Die Perioden wurden am genauesten aus der am besten aufgehenden 1. Kettendivision gerechnet, wobei sich auch die seither schon ziemlich sicher bekannte 11 jährige Periode recht gut, nämlich zu 11,28 Jahren, ergab. Außerdem fand ich neben einer nahezu unendlich langen Periode, eine zu etwa 21 Jahren, kleiner als $2 \times 11$ Jahre, und eine andere zu etwa 6 Jahren, größer als $\frac{1}{2} \times 11$ Jahre. (Die unendlich lange Periode bedeutet nur das Auftreten eines konstanten Gliedes in der aufzustellenden Formel.) Der Grund, warum schließlich die aufgestellte Formel für größere „$m$" doch nicht so gut stimmt, liegt einmal darin, daß die Fehler in den Periodenwinkeln und seien sie auch nur klein, für $m = n$ ver„$n$"facht auftreten. In zweiter Linie

tragen zu den Ungenauigkeiten die auch mit zum Aufbau der Formel benützten Ergebnisse der 2. Kettendivision, deren Restglieder ziemlich groß sind, bei. In Anbetracht dieser Umstände kann man dann von der Formel nicht erwarten, daß sie besser übereinstimmende Funktionswerte ergibt.

Schließlich habe ich die Rechnung noch ein zweites Mal durchgeführt, da die Formel für die Ermittlung der Zwischenwerte, nämlich der Jahresmittelrelativzahlen, nicht recht geeignet erschien. Ich bildete diesmal aus je 3 aufeinanderfolgenden Jahresmittelzahlen das Mittel und operierte dann mit den Differenzen aus diesen neuen Mittelzahlen und dem durch die erste Rechnung erhaltenen konstanten Glied „53,3". (Die Lagrangesche Methode gibt das konstante Glied zuverlässiger als eine bloße Mittelbildung!) Dadurch lieferten die Kettendivisionen schon nach „drei"maliger Vornahme des Divisionsverfahrens kleine zu vernachlässigende Reste. Die auf diese Weise gefundenen Perioden stimmten mit den schon erhaltenen nahezu vollkommen überein. In der Schlußformel ergaben sich einige Abweichungen von der zuerst erhaltenen Formel.

Zum Schlusse möchte ich Herrn Professor Dr. Heinrich Burkhardt, der mir diese Bearbeitung anriet und mir jederzeit mit Rat und Tat gütigst beistand, meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Der Verfasser.

## I. Teil.

In den Memoiren der Pariser Akademie für das Jahr 1772 (I. Teil publ. 1775; wieder abgedruckt in den Œuvres de Lagrange Paris 1873, VI. Band) findet sich eine von J. L. Lagrange gegebene Abhandlung

„Recherches sur la manière de former des tables des planètes d'après les seules observations". (L. S. 507.)

Lagrange stellt sich dort die Frage, wie man bei einer gegebenen Zahlenfolge, über deren etwaig gesetzmäßige Anordnung nichts bekannt ist, nur mit Hilfe der vorliegenden Zahlen entscheiden kann, ob diese aus einer Formel

$$(1) \quad T^{(m)} = A\sin(a + m\alpha) + B\sin(b + m\beta) + \cdots + F\sin(f + m\varphi)$$

dadurch erhalten werden können, daß man in ihr für $m$ nacheinander die Zahlen der natürlichen Zahlenfolge (0, 1, 2, 3, . . .) setzt.

Die Formel (1) ist Summe von $n$ Produkten. $A$, $a$, $\alpha$, $B$, $b$, $\beta$ . . . $F$, $f$, $\varphi$ sind zusammen $3n$ Größen, welche von $m$ unabhängig bleiben.

Man kann diese Aufgabe auch nennen die Frage nach einer Interpolation eines Systems gegebener Funktionswerte durch trigonometrische Formeln (Jahresbericht d. D. M. V. 1901/1. S. 228).

Lagrange findet im Laufe der Untersuchung folgendes. Wenn

1. die Restglieder in einer vorzunehmenden Kettendivision alle verschwinden oder wenigstens alle hinlänglich klein ausfallen

und wenn

2. bei einer bestimmten Gleichung, deren Aufbau sich aus den Ergebnissen der Kettendivision bestimmt, alle Wurzeln reell sind und zwischen den Zahlen $+2$ und $-2$ liegen,

dann besitzt die gegebene Zahlenfolge die angegebene Eigenschaft.

Lagrange behandelt das Problem zunächst indirekt und zwar untersucht er, zu welchen Folgerungen man geführt wird, wenn man eine aus der Folge gebildete Reihe schon so beschaffen annimmt, daß der Koeffizient ihres allgemeinen $(m)^{\text{ten}}$ Gliedes die Form (1) besitzt.

Jede solche Reihe, so zeigt Lagrange an erster Stelle (S. 511), ist notwendig eine rekurrente, deren Rekursionsgesetz allein von den Winkeln $\alpha, \beta, \ldots, \varphi$ in (1) abhängt.

### Beweis zu (a).

Es sei T eines der Glieder etwa aus der Mitte der gegebenen Zahlenfolge und seien

$$T', T'', T''', \ldots T^{(m)}, \ldots$$

die ihm folgenden Glieder.

In der unendlichen Reihe

$$(2) \quad T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \cdots T^{(m)}x^m + T^{(m+1)}x^{m+1} + \cdots$$

soll dann nach Voraussetzung

$$(1) \quad T^{(m)} = A\sin(a + m\alpha) + B\sin(b + m\beta) + \cdots + F\sin(f + m\varphi)$$

eine Summe von „$n$“ Produkten sein.

Da

$$(3) \qquad \sin\Phi = \frac{e^{i\Phi} - e^{-i\Phi}}{2i}$$

ist, so folgt, wenn zur Abkürzung

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{Ae^{ia}}{2i} = K; & e^{i\alpha} = p \\ \dfrac{-Ae^{-ia}}{2i} = L; & e^{-i\alpha} = q \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$A\sin(a+m\alpha) = Kp^m + Lq^m.$$

Ähnlich findet man

$$B\sin(b+m\beta) = Mr^m + Ns^m$$

usw.

Das allgemeine Glied (1) erhält somit folgende Form

$$\mathrm{T}^{(m)} = Kp^m + Lq^m + Mr^m + Ns^m + \cdots \tag{5}$$

woraus hervorgeht, daß die unendliche Reihe (2) als eine Summe von „$2n$" geometrischen Reihen mit unendlicher Gliederzahl betrachtet werden kann.

Falls $|x| < 1$ kann man jede dieser $2n$ geometrischen Reihen summieren. Für

$$|x| < 1$$

ergibt sich dann die identische Gleichung

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \mathrm{T}'''x^3 + \cdots = \tag{6}$$
$$= \frac{K}{1-px} + \frac{L}{1-qx} + \frac{M}{1-rx} + \frac{N}{1-sx} + \cdots$$

deren rechte Seite $2n$ Summanden, oder

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \mathrm{T}'''x^3 + \cdots = \tag{7}$$
$$= \frac{K+L-x(Kq+Lp)}{1-(p+q)x+pqx^2} + \frac{M+N-x(Ms+Nr)}{1-(r+s)x+rsx^2} + \cdots$$

deren rechte Seite $n$ Summanden aufweist.

Berücksichtigt man neben (3) und (4) noch

$$\cos\Phi = \frac{e^{i\Phi} + e^{-i\Phi}}{2}$$

so folgt aus (7)

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \cdots = \tag{8}$$
$$= \frac{A\sin a - xA\sin(a-\alpha)}{1-2x\cos\alpha+x^2} + \frac{B\sin b - xB\sin(b-\beta)}{1-2x\cos\beta+x^2} + \cdots$$

eine Gleichung, deren rechte Seite ebenfalls eine Summe von $n$ Gliedern ist. Bringt man nun auf einen Hauptnenner, so erhält man den die Reihe (2) „erzeugenden Bruch". Der Nenner dieses „erzeugenden Bruches" ist ein Produkt von $n$ Faktoren, wovon jeder einzelne ein reziprokes Trinom mit dem Anfangsglied 1 darstellt.

Da das Produkt reziproker Polynome stets wieder ein reziprokes Polynom ist, so folgt aus (8), daß der Nenner des „erzeugenden

Bruches“ ein reziprokes Polynom vom Grade $2n$ ist, welches allein von den Winkeln $\alpha$, $\beta$, ... $\varphi$ abhängt und dessen von $x$ freies Glied die Einheit ist.

Der Zähler des die Reihe (2) „erzeugenden Bruches“ wird ein Polynom im allgemeinen vom Grade $2n-1$.

Die Summe der gegebenen Reihe (2) kann also auf folgende Form gebracht werden

$$(9)\qquad \mathrm{T}+\mathrm{T}'x+\mathrm{T}''x^2+\cdots = \frac{[o]+[1]x+[2]x^2+[3]x^3+\cdots+[2n-1]x^{2n-1}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}.$$

Hieraus folgt durch Koeffizientenvergleichung

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} &= [0]\\
\mathrm{T}' &= -(1)\mathrm{T}+[1]\\
\mathrm{T}'' &= -(1)\mathrm{T}'-(2)\mathrm{T}+[2]\\
&\vdots\\
\mathrm{T}^{(2n-1)} &= -(1)\mathrm{T}^{(2n-2)}-(2)\mathrm{T}^{(2n-3)}-(3)\mathrm{T}^{(2n-4)}-\cdots-(2)\mathrm{T}'-(1)\mathrm{T}+[2n-1]\\
\mathrm{T}^{(2n)} &= -(1)\mathrm{T}^{(2n-1)}-(2)\mathrm{T}^{(2n-2)}-(3)\mathrm{T}^{(2n-3)}-\cdots-(2)\mathrm{T}''-(1)\mathrm{T}'-\mathrm{T}
\end{aligned}$$

und im allgemeinen für $m>2n$

$$\mathrm{T}^{(m)} = -(1)\mathrm{T}^{(m-1)}-(2)\mathrm{T}^{(m-2)}-(3)\mathrm{T}^{(m-3)}-\cdots-(2)\mathrm{T}^{(m-2n+2)}-(1)\mathrm{T}^{(m-2n+1)}-\mathrm{T}^{(m-2n)}.$$

Da die Ausdrücke (1), (2), (3), ... nur von den Winkeln $\alpha$, $\beta$, ... $\varphi$ abhängen, so ist auch das Rekursionsgesetz nur von diesen Winkeln abhängig. Damit ist Satz (a) bewiesen.

---

Seien

$$\mathrm{`T},\ \mathrm{``T},\ \mathrm{```T},\ \ldots$$

die dem Glied T in der gegebenen Zahlenfolge

$$\ldots\ \mathrm{```T},\ \mathrm{``T},\ \mathrm{`T},\ \mathrm{T},\ \mathrm{T}',\ \mathrm{T}'',\ \mathrm{T}''',\ \ldots$$

vorhergehenden Glieder. Dann stellt Lagrange neben die Reihe (2) noch die Reihe

$$(10)\qquad \mathrm{`T}+\mathrm{``T}x+\mathrm{```T}x^2+{}^{\mathrm{IV}}\mathrm{T}x^3+\cdots.$$

Von ihr zeigt Lagrange, daß der sie „erzeugende Bruch“ als Zähler und Nenner bzw. die „entgegengesetzten Polynome“
(b) des Zählers und Nenners des „erzeugenden Bruches“ von (2) hat und das entgegengesetzte Vorzeichen besitzt. (L. S. 548.) „Entgegengesetzte Polynome“ sind solche Polynome, welche vom selben Grad sind, auch dieselben Koeffizienten haben, welche letzteren aber

in beiden Polynomen entgegengesetzt angeordnet sind. Z. B. ist $c + bx + ax^2$ das „entgegengesetzte Poly-(Tri-)nom“ zu $a + bx + cx^2$. (L. S. 552.)

Beweis zu (b).

Da der Ausdruck für $\mathrm{T}^{(m)}$ in (5) allgemein gilt, d. h. für alle Glieder Geltung haben muß, so ergeben sich für die Werte der Glieder

$$'\mathrm{T},\ ''\mathrm{T},\ '''\mathrm{T},\ \ldots\ {}^{(m)}\mathrm{T}$$

Ausdrücke, die entstehen, wenn man an Stelle von $m$ in (5) nacheinander

$$-1,\ -2,\ -3,\ \ldots\ -m$$

setzt. Es wird also

$${}^{(m)}\mathrm{T} = Kp^{-m} + Lq^{-m} + Mr^{-m} + Ns^{-m} + \cdots.$$

Das allgemeine Glied der Reihe

$$\mathrm{T} + \mathrm{T}x + ''\mathrm{T}x^2 + '''\mathrm{T}x^3 + \cdots \tag{11}$$

wird somit durch die Formel (a)

$$(Kp^{-m} + Lq^{-m} + Mr^{-m} + Ns^{-m} + \cdots)x^m$$

gegeben, woraus hervorgeht, daß die unendliche Reihe (11) eine Summe von $2n$ geometrischen Reihen mit unendlicher Gliederzahl ist.

Wird jede dieser $2n$ geometrischen Reihen summiert, so ergibt sich für $|x| < 1$ ähnlich wie in (6)

$$\mathrm{T} + '\mathrm{T}x + ''\mathrm{T}x^2 + '''\mathrm{T}x^3 + \cdots = \tag{12}$$
$$= \frac{K}{1 - \frac{x}{p}} + \frac{L}{1 - \frac{x}{q}} + \frac{M}{1 - \frac{x}{r}} + \frac{N}{1 - \frac{x}{s}} + \cdots.$$

Betrachtet man jetzt die identische Gleichung

$$(6) = (9)$$

so hat man hieraus für $x = 0$

$$[0] = K + L + M + N + \cdots \tag{13}$$

und wenn man $\frac{1}{x}$ an Stelle von $x$ setzt

$$\frac{x\{[0]x^{2n-1} + [1]x^{2n-2} + \cdots + [2n-2]x + [2n-1]\}}{x^{2n} + (1)x^{2n-1} + (2)x^{2n-2} + \cdots + (2)x^2 + (1)x + 1} = \tag{14}$$
$$= -\frac{Kx}{p - x} - \frac{Lx}{q - x} - \cdots.$$

Jetzt bildet man (13) — (14)

$$[0] - \frac{x\{[0]x^{2n-1} + [1]x^{2n-2} + \cdots + [2n-1]\}}{x^{2n} + (1)x^{2n-1} + \cdots + (1)x + 1} =$$

$$= \frac{Kp}{p-x} + \frac{Lq}{q-x} + \cdots = \frac{K}{1-\frac{x}{p}} + \frac{L}{1-\frac{x}{q}} + \cdots$$

und findet durch Vergleich mit (12)

$$(15) \qquad \mathrm{T} + \grave{\mathrm{T}}x + \ddot{\mathrm{T}}x^2 + \dddot{\mathrm{T}}x^3 + \cdots =$$

$$= [0] - \frac{x\{[0]x^{2n-1} + [1]x^{2n-2} + \cdots + [2n-1]\}}{x^{2n} + (1)x^{2n-1} + \cdots + (1)x + 1}.$$

Hieraus für $x = 0$

$$(16) \qquad \mathrm{T} = [0].$$

Endlich aus (15) — (16) und nachfolgender Division mit $x$ die Behauptung (b)

$$(17) \qquad \grave{\mathrm{T}} + \ddot{\mathrm{T}}x + \dddot{\mathrm{T}}x^2 + \mathrm{IV}\mathrm{T}x^3 + \cdots =$$

$$= -\frac{[0]x^{2n-1} + [1]x^{2n-2} + \cdots + [2n-2]x + [2n-1]}{x^{2n} + (1)x^{2n-1} + \cdots + (1)x + 1}.$$

---

Lagrange bildet nun folgende zwei Reihenpaare

$$(18) \quad (\mathrm{T} + \grave{\mathrm{T}}) + (\mathrm{T}' + \ddot{\mathrm{T}})x + (\mathrm{T}'' + \dddot{\mathrm{T}})x^2 + (\mathrm{T}''' + \mathrm{IV}\mathrm{T})x^3 + \cdots = S_1$$

$$(19) \quad (\mathrm{T} - \grave{\mathrm{T}}) + (\mathrm{T}' - \ddot{\mathrm{T}})x + (\mathrm{T}'' - \dddot{\mathrm{T}})x^2 + (\mathrm{T}''' - \mathrm{IV}\mathrm{T})x^3 + \cdots = S_2$$

und

$$(20) \quad \mathrm{T} + (\mathrm{T}' + \grave{\mathrm{T}})x + (\mathrm{T}'' + \ddot{\mathrm{T}})x^2 + (\mathrm{T}''' + \dddot{\mathrm{T}})x^3 + \cdots = S_3$$

$$(21) \quad (\mathrm{T}' - \grave{\mathrm{T}}) + (\mathrm{T}'' - \ddot{\mathrm{T}})x + (\mathrm{T}''' - \dddot{\mathrm{T}})x^2 + \cdots = S_4,$$

von welchen das erste Reihenpaar (18) und (19) zwei rekurrente Reihen darstellt, die in ihren „erzeugenden Brüchen“ als Nenner je
(c) ein reziprokes Polynom vom Grade $2n$ und als Zähler je ein Produkt aus einem reziproken Polynom vom Grade $2n-2$ und dem Binom $1-x$ bzw. $1+x$ haben.

Ähnlich stellt die Reihe (20) eine rekurrente dar, deren „erzeugender Bruch“ als Nenner auch ein reziprokes Polynom vom
(d) Grade $2n$ und als Zähler ein Produkt ebenfalls aus einem reziproken Polynom vom Grade $2n-2$ und dem Binom $1-x^2$ hat.

Reihe (21) ist eine rekurrente, deren „erzeugender Bruch“ als
(e) Nenner und als Zähler je ein reziprokes Polynom vom Grade $2n$ bzw. $2n-2$ hat.

Beweis zu (c).

Aus (9) und (17) folgt durch Addition und Subtraktion

$$S_1 = \frac{\{[0]-[2n-1]\}+\{[1]-[2n-2]\}x+\cdots+\{2n-2]-[1]\}x^{2n-2}+\{[2n-1]-[0]\}x^{2n-1}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}$$

und

$$S_2 = \frac{\{[0]+[2n-1]\}+\{[1]+[2n-2]\}x+\cdots+\{[2n-2]+[1]\}x^{2n-2}+\{[2n-1]+[0]\}x^{2n-1}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}$$

Der erzeugende Bruch (22) der Reihe (18) hat im Zähler ein „anti-reziprokes" Polynom (L., S. 581, Zeile 11) vom Grade $2n-1$, d. h. ein solches, bei dem die von den Enden des Polynoms gleichweit abstehenden Koeffizienten entgegengesetzt gleich sind. Ein solches anti-reziprokes Polynom ist stets durch $1-x$ teilbar. Der entstehende Quotient ist wieder ein „reziprokes" Polynom; denn da der Zähler in (22) die Differenz der beiden „entgegengesetzten" Zählerpolynome in (9) und (17) wird, so folgt, wenn zur Abkürzung diese beiden entgegengesetzten Polynome mit $P$ und $Q$ bezeichnet werden, für $x = 1$

$$P = Q \quad \text{oder} \quad P - Q = 0.$$

Also ist einmal $P - Q$ durch $1 - x$ teilbar!

Multipliziert man jetzt $P - Q$ mit $1 - x$, so hat man

$$P - Q - Px + Qx, \tag{24}$$

was somit durch $(1-x)^2$ oder

$$1 - 2x + x^2 \tag{25}$$

teilbar sein muß. Man überzeugt sich nun leicht, daß (24) ein reziprokes Polynom darstellt. [$P + Qx$ und $Q + Px$ sind reziproke Polynome, also auch ihre Differenz (24)]. Der Quotient der beiden reziproken Polynome (24) und (25), welcher aber gerade auch gleich dem Quotient aus $P - Q$ und $1 - x$ ist, ist auch ein reziprokes Polynom.

Das reziproke Polynom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades im Zähler von (23), muß, da es ein ungeradzahliges ist, durch $1 + x$ teilbar und der entstehende Quotient als Quotient zweier reziproken Polynome selbst ein reziprokes Polynom sein.

Beweis zu (d).

Durch Addition aus (9) und der mit $x$ multiplizierten Gleichung (17) ergibt sich

$$(26)\quad S_3 = \frac{[0]+\{[1]-[2n-1]\}x+\cdots+\{[2n-1]-[1]\}x^{2n-1}+\{-[0]\}x^{2n}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}.$$

Da im „anti-reziproken" Polynom vom Grade $2n$ des Zählers in (26) der Koeffizient des mittleren Gliedes Null sein muß (nämlich $[n]-[2n-n]$), so ist leicht zu sehen, daß der Zähler durch $1-x$ teilbar ist. Durch die Division mit $1-x$ entsteht, ähnlich wie im Beweise zu (c) gezeigt wurde, ein reziprokes Polynom $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades und hieraus durch Division mit $1+x$, ein Quotient zweier reziproker Polynome, der selbst ein „reziprokes" Polynom $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades sein muß.

Beweis zu (e).

Durch Subtraktion der Gleichungen (9) und (16) findet man

$$(27)\quad \mathrm{T}'x+\mathrm{T}''x^2+\cdots = \frac{\{[0]-[0]\}+\{[1]-[0](1)\}x+\{[2]-[0](2)\}x^2+\cdots+\{[2n-1]-[0](1)\}x^{2n-1}+\{-[0]\}x^{2n}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}$$

Dividiert man nun beide Seiten von (27) durch $x$, so ergibt sich

$$(28)\quad \mathrm{T}'+\mathrm{T}''x+\mathrm{T}'''x^2+\cdots = \frac{\{[1]-[0](1)\}+\{[2]-[0](2)\}x+\cdots+\{[2n-1]-[0](1)\}x^{2n-2}+\{-[0]\}x^{2n-1}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}$$

Durch Bilden der Differenz (28)—(17) findet man die Reihe (21)

$$29)\quad S_4 = \frac{\{[1]-[0](1)+[2n-1]\}+\{[2]-[0](2)+[2n-2]\}x+\cdots+\{[2n-1]-[0](1)+[1]\}x^{2n}}{1+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+x^{2n}}$$

woraus die Behauptung (e) ohne weiteres ersichtlich ist.

---

Nun folgt aus (c), (d) und (e), daß, wenn man die Reihen (18), (19), (20), (21) bzw. mit $1-x$, $1+x$, $1-x^2$, 1 dividiert, neue Reihen entstehen, deren „erzeugende Brüche" alle als Nenner je ein reziprokes Polynom geraden $(2n)^{\text{ten}}$ Grades und als Zähler ein reziprokes Polynom $(2n-2)^{\text{ten}}$ Grades besitzen.

(f) Von solchen rekurrenten Reihen $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung zeigt Lagrange (S. 559), daß man sie in andre rekurrente Reihen von nur halb so großer Ordnungszahl $(n)$ überführen kann, wenn man $y$ statt $x$ durch die Substitution

(30) $$y = \frac{x}{1+x^2}$$

einführt. Die „erzeugenden Brüche“ sind dabei „vor“ der Substitution (30) alle mit $1+x^2$ zu multiplizieren.

Sonach lassen sich die „erzeugenden Brüche“ von (18), (19), (20), (21) durch folgende Ausdrücke darstellen.

(31) $$S_1 = \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \frac{V}{Y}$$

(32) $$S_2 = \frac{1+x}{1+x^2} \cdot \frac{V'}{Y}$$

(33) $$S_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{V''}{Y}$$

(34) $$S_4 = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{V'''}{Y},$$

wobei $V$, $V'$ $V''$, $V'''$ Polynome in $y$ vom Grade $n-1$ sind; $Y$ ist ein Polynom in $y$ vom Grade $n$ und zwar immer dasselbe, wie mit aus (22), (23), (26), (29) hervorgeht.

## Beweis zu (f).

Sei gegeben die Reihe

(35) $$t + t'x + t''x^2 + t'''x^3 + \cdots$$

und deren „erzeugender Bruch“ durch den Ausdruck

(36) $$\frac{[0]+[1]x+[2]x^2+\cdots+[2]x^{2n-4}+[1]x^{2n-3}+[0]x^{2n-2}}{(0)+(1)x+(2)x^2+\cdots+(2)x^{2n-2}+(1)x^{2n-1}+(0)x^{2n}}.$$

Reihe (35) soll nun in eine andre

(37) $$\Theta + \Theta' y + \Theta'' y^2 + \Theta''' y^3 + \cdots,$$

deren „erzeugender Bruch“ durch

(38) $$\frac{a+by+cy^2+\cdots+hy^{n-1}}{A+By+Cy^2+\cdots+Ky^n}$$

dargestellt ist, mittels Substitution (30) übergeführt werden.

Man erhält nun durch (30) aus (38), wenn gleich Zähler und Nenner mit $(1+x^2)^n$ multipliziert wird

(39) $$\frac{(1+x^2)[a(1+x^2)^{n-1}+bx(1+x^2)^{n-2}+cx^2(1+x^2)^{n-3}+\cdots+hx^{n-1}]}{A(1+x^2)^n+Bx(1+x^2)^{n-1}+Cx^2(1+x^2)^{n-2}+\cdots+Kx^n},$$

und dieser Bruch ist nach Voraussetzung gleich der Reihe (37) oder gleich

$$(40) \qquad \Theta + \frac{\Theta' x}{1+x^2} + \frac{\Theta'' x^2}{1+x^2)^2} + \frac{\Theta''' x^3}{(1+x^2)^3} + \cdots .$$

Teilt man jetzt (39) durch $1 + x^2$, so hat man den neuen Bruch

$$(41) \qquad \frac{a(1+x^2)^{\mu-1} + bx(1+x^2)^{\mu-2} + cx^2(1+x^2)^{\mu-3} + \cdots + hx^{\mu-1}}{A(1+x^2)^{\mu} + Bx(1+x^2)^{\mu-1} + Cx^2(1+x^2)^{\mu-2} + \cdots + Kx^{\mu}},$$

der dann gleich ist der durch $1 + x^2$ dividierten Reihe (40), also gleich

$$(42) \qquad \frac{\Theta}{1+x^2} + \frac{\Theta' x}{(1+x^2)^2} + \frac{\Theta'' x^2}{(1+x^2)^3} + \frac{\Theta''' x^3}{(1+x^2)^4} + \cdots .$$

Wenn man jetzt sowohl im Zähler wie im Nenner von (41) die Potenzen von $(1 + x^2)$ entwickelt und dann nach steigenden Potenzen von $x$ ordnet, wird man sehen, daß der Nenner ein „reziprokes" Polynom vom Grade $2n$ und der Zähler ein „reziprokes" Polynom vom Grade $2n - 2$ sein wird. Man kann also die Polynome des Zählers und Nenners von (41) bzw. Glied für Glied mit den Polynomen des Zählers und Nenners von (36) vergleichen. Dieser Vergleich wird dazu dienen können, die $n$ Koeffizienten

$$a, \quad b, \quad c, \quad \ldots, \quad h$$

durch die $n$ Koeffizienten

$$[0], \quad [1], \quad [2], \quad \ldots, \quad [n-1],$$

und ebenso die $(n + 1)$ Koeffizienten

$$A, \quad B, \quad C, \quad \ldots, \quad K,$$

durch die $(n + 1)$ Koeffizienten

$$(0), \quad (1), \quad (2), \quad \ldots, \quad (n)$$

auszudrücken.

Es muß jetzt auch die Reihe (42) d. h. die durch $1 + x^2$ dividierte Reihe (37) mit der Reihe (35) verglichen werden können. Damit ist (f) indirekt bewiesen.

---

Nach diesen Voruntersuchungen tritt Lagrange näher an die eigentliche Aufgabe heran. Er beweist vor allem folgenden Satz:

(g) Um zu erkennen, ob eine gegebene Zahlenfolge eine rekurrente Reihe bildet, dividiere man zunächst die Einheit durch die gebildete Reihe $s$ und führe die Division so lange fort, bis man im Quotienten zwei Glieder, etwa $p_0 + q_0 x$ hat. Den sich dabei ergebenden Rest

$x^2 \cdot (s')$ dividiere man mit $x^2$ und wiederhole alsdann dasselbe Verfahren, indem man jetzt mit $s'$ in $s$ dividiert. Es ergibt sich so ein neuer Quotient $p_0' + q_0' x$ und im allgemeinen ein neuer Rest $x^2 \cdot (s'')$. Man dividiere neuerdings mit $s''$ in $s'$. Der Quotient wird $p_0'' + q_0'' x$, der Rest $x^2 \cdot (s''')$.

Ist nun die Reihe rekurrent von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung, so geht die Rechnung nach der $(2n)^{\text{ten}}$ Division auf. Der letzte Quotient ist somit mit $p_0^{(2n-1)} + q_0^{(2n-1)} x$ zu bezeichnen.

In Formeln drückt sich dieses Verfahren auf folgende Weise aus

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{s} = p_0 + q_0 x + \dfrac{x^2 \cdot s'}{s} \text{ und } & s = \dfrac{1}{p_0 + q_0 x + \dfrac{x^2 \cdot s'}{s}} \\ \dfrac{s}{s'} = p_0' + q_0' x + \dfrac{x^2 \cdot s''}{s'} \text{ und } & \dfrac{s'}{s} = \dfrac{1}{p_0' + q_0' x + \dfrac{x^2 \cdot s''}{s'}} \\ \dfrac{s'}{s''} = p_0'' + q_0'' x + \dfrac{x^2 \cdot s'''}{s''} \text{ und } & \dfrac{s''}{s'} = \dfrac{1}{p_0'' + q_0'' x + \dfrac{x^2 \cdot s'''}{s''}} \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{s^{(2n-2)}}{s^{(2n-1)}} = p_0^{(2n-1)} + q_0^{(2n-1)} x \text{ und } & \dfrac{s^{(2n-1)}}{s^{(2n-2)}} = \dfrac{1}{p_0^{(2n-1)} + q_0^{(2n-1)} x}. \end{cases}$$

Lagrange erhält so für die von $(2n)^{\text{ter}}$ Ordnung rekurrente Reihe $s$ folgenden Kettenbruch

$$(44)\quad s = \cfrac{1}{p_0 + q_0 x + \cfrac{x^2}{p_0' + q_0' x + \cfrac{x^2}{p_0'' + q_0'' x + \cdot\cdot + \cfrac{x^2}{p_0^{(2n-1)} + q_0^{(2n-1)} x}}}}.$$

Beweis zu (g). (L. Seite 525.)

Angenommen die Reihe $s$ sei rekurrent von der 1. Ordnung; dann ist

$$s = \frac{a'}{a + bx},$$

hieraus

$$\frac{1}{s} = \frac{a + bx}{a'} = p_0 + q_0 x,$$

woraus hervorgeht, daß, wenn man in diesem Falle die Einheit durch das Polynom $s$ dividiert, die Division restlos den zweigliedrigen Quotienten $p_0 + q_0 x$ liefert.

Nimmt man an, die Reihe $s$ ist rekurrent von der 2. Ordnung, so ist

$$s = \frac{a' + b'x}{a + bx + cx^2}$$

und

$$\frac{1}{s} = \frac{a + bx + cx^2}{a' + b'x} = p_0 + q_0 x + \frac{a'' x^2}{a' + b'x}. \tag{45}$$

Teilt man also die Einheit durch die Reihe $s$ und führt die Division solange fort, bis man im Quotienten zwei Glieder nämlich $p_0 + q_0 x$ hat, so ist der Divisionsrest $s' x^2$ durch $x^2$ teilbar. Mit dieser Bezeichnung gilt auch

$$\frac{1}{s} = p_0 + q_0 x + \frac{s' x^2}{s}. \tag{46}$$

Aus (45) und (46) folgt

$$\frac{s}{s'} = \frac{a' + b'x}{a''} = p_0' + q_0' x.$$

Teilt man somit die Reihe $s$ durch den mit $x^2$ dividierten Rest $s'$, so geht, im Falle man eine rekurrente „zweiter" Ordnung hat, diese „zweite" Division auf, wobei ein zweigliedriger Quotient $p_0' + q_0' x$ entsteht.

Lagrange gelangt so durch einen einfachen Induktionsschluß zum Satz (g).

---

Nun sind die betrachteten Reihen (18), (19), (20), (21), wie in (22), (23), (26), (29) gezeigt wurde, rekurrent von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung, lassen sich aber, wie (31), (32), (33), (34) zeigt, in rekurrente Reihen $(n)^{\text{ter}}$ Ordnung überführen. Man hat also z. B. für die erste dieser Reihen (22) aus (31) unter Verwendung der Kettenbruchdarstellung (44)

$$S_1 = \frac{1 - x}{1 + x^2} \cdot \cfrac{1}{p_1 + q_1 y + \cfrac{y^2}{p_1' + q_1' y + \cfrac{y^2}{p_1'' + q_1'' y + \cdots + \cfrac{y^2}{p_1^{(n-1)} + q_1^{(n-1)} y}}}}. \tag{47}$$

Führt man hierin $x$ statt $y$ durch $y = \frac{x}{1 + x^2}$ (Subst. (30)) ein, so wird

$$S_1 = \cfrac{1 - x}{p_1(1 + x^2) + q_1 x + \cfrac{x^2}{p_1'(1 + x^2) + q_1' x + \cdots + \cfrac{x^2}{p_1^{(n-1)}(1 + x^2) + q_1^{(n-1)} x}}}. \tag{48}$$

Es wurde gezeigt, daß der Kettenbruch (44) unmittelbar aus dem Gleichungssystem (43) erhalten werden kann. Umgekehrt überzeugt man sich, daß der Kettenbruch (48) aus folgendem Gleichungssystem entstanden gedacht werden kann.

$$(49)\qquad \begin{cases} \dfrac{1-x}{S_1} = p_1(1+x^2) + q_1 x + \dfrac{S_1' x^2}{S_1} \\ \dfrac{S_1}{S_1'} = p_1'(1+x^2) + q_1' x + \dfrac{S_1'' x^2}{S_1'} \\ \dfrac{S_1'}{S_1''} = p_1''(1+x^2) + q_1'' x + \dfrac{S_1''' x^2}{S_1''} \\ \qquad\qquad\vdots \\ \dfrac{S_1^{(n-2)}}{S_1^{(n-1)}} = p_1^{(n-1)}(1+x^2) + q_1^{(n-1)} x\,. \end{cases}$$

Dabei sind zum Unterschiede von der Bezeichnung in (43) statt $s$, $s'$, $s''$, $s'''$, ..., $s^{(2n-2)}$, $s^{(2n-1)}$ die großen Buchstaben

$$S_1,\ S_1',\ S_1'',\ S_1''',\ \ldots,\ S_1^{(n-2)},\ S_1^{(n-1)}$$

verwendet.

Aus dem Gleichungssystem (49) ist im Zusammenhang mit dem unter (g) und früher Gesagten zu erkennen, daß man zur Feststellung darüber, ob die aus einer gegebenen Zahlenfolge (... ‴T, ″T, ′T, T, T′, T″, T‴, ...) gebildete Reihe (2) rekurrent von der $(2n)^{\text{ten}}$ Ordnung ist, statt $2n$ nur „$n$“ Divisionen auszuführen hat, wenn man aus den Gliedern dieser Folge die Reihe (18) bildet und mit ihr die Kettendivision, so, wie es das Gleichungssystem (49) vorschreibt, vornimmt.

Zur bequemeren Rechnung richtet Lagrange das System (49) noch so ein, daß

$$1 = p_1 = p_1' = p_1'' = p_1''' = \cdots p_1^{(n-2)} = p_1^{(n-1)} = 1.$$

Um zu erreichen daß $p_1 = 1$, muß in (49) $1 - x$ nicht durch $S_1$, sondern durch $S$ dividiert werden, wobei

$$S = \frac{S_1}{p}$$

und $p$ das von $x$ freie Glied der Reihe $S_1$ bedeutet.

Seien weiter

$$S',\ S'',\ S''',\ \ldots,\ S^{(n-2)},\ S^{(n-1)}$$

die mit ihrem von $x$ freien Gliede

$$p',\ p'',\ p''',\ \ldots,\ p^{(n-2)},\ p^{(n-1)}$$

dividierten Restpolynome in der Kettendivision, so kann das Gleichungssystem (49) durch folgendes einfachere ersetzt werden.

$$(50)\qquad \begin{cases} S = \dfrac{S_1}{p} \\ \dfrac{1-x}{S} = 1 + x^2 + qx + \dfrac{p'S'x^2}{S} \\ \dfrac{S}{S'} = 1 + x^2 + q'x + \dfrac{p''S''x^2}{S'} \\ \dfrac{S'}{S''} = 1 + x^2 + q''x + \dfrac{p'''S'''x^2}{S''} \\ \vdots \\ \dfrac{S^{(n-2)}}{S^{(n-1)}} = 1 + x^2 + q^{(n-1)}x \end{cases}$$

oder

$$(51)\qquad \begin{cases} S_1 = Sp \\ S = \dfrac{1-x}{1 + x^2 + qx + \dfrac{p'S'x^2}{S}} \\ \dfrac{S'}{S} = \dfrac{1}{1 + x^2 + q'x + \dfrac{p''S''x^2}{S'}} \\ \dfrac{S''}{S'} = \dfrac{1}{1 + x^2 + q''x + \dfrac{p'''S'''x^2}{S''}} \\ \vdots \\ \dfrac{S^{(n-1)}}{S^{(n-2)}} = \dfrac{1}{1 + x^2 + q^{(n-1)}x}. \end{cases}$$

Aus (51) folgt

$$(52)\qquad S_1 = \frac{p(1-x)}{1+x^2+qx} + \frac{p'x^2}{1+x^2+q'x} + \frac{p''x^2}{1+x^2+q''x} + \cdots + \frac{p^{(n-1)}x^2}{1+x^2+q^{(n-1)}x}.$$

**1. Methode.**

Aus (50) kann nun folgendes abgelesen werden.

Um zu untersuchen, ob die Reihe (2) rekurrent ist, dividiere man die Reihe $S_1$ in (18) durch ihr von $x$ freies Glied $p$. Mit dieser so erhaltenen Reihe $S$ dividiere man in $1-x$ derart, daß man im Quotienten statt 1 zuerst $1+x^2$ schreibt. Mit $1+x^2$ wird dann wie gewöhnlich der Divisor $S$ multipliziert und das Produkt vom Dividenden $1-x$ abgezogen.

Hierauf setzt man die Division nach der gewohnten Weise fort, indem man mit dem 1. Glied des Divisors in das 1. Glied des erhaltenen Restes dividiert. Im Quotienten wird so ein Glied von der Form $qx$ auftreten. Multipliziert man $qx$ mit $S$ und zieht das Produkt vom Reste ab, so erhält man den endgültigen Rest $p'S'x^2$, dessen 1. Glied im allgemeinen $p'x^2$ sein wird.

Mit $S'$ dividiere man alsdann in $S$ auf ganz dieselbe Art wie mit $S$ in $1-x$. Der neue Quotient wird dann $1+x^2+q'x$, der neue endgültige Rest $p''S''x^2$.

Geht nun nach $n$ maliger Anwendung dieses Divisionsverfahrens die letzte $(n)^{\text{te}}$ Division auf, so ist die Reihe (2) rekurrent von der „$(2n)^{\text{ten}}$" Ordnung. (1. Kriterium L. Seite 585.)

Die so ermittelten Größen

$$p,\ p',\ p'',\ p''',\ \ldots,\ p^{(n-1)}$$

und

$$q,\ q',\ q'',\ q''',\ \ldots,\ q^{(n-1)}$$

bestimmen alsdann den Kettenbruch (52), dessen Verwandlung in einen gewöhnlichen Bruch den „erzeugenden Bruch" der Reihe $S_1$ in (18) liefert.

Diese Verwandlung geht einfacher vor sich, wenn man wieder $y$ durch die Substitution $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ einführt. (52) geht dadurch über in

$$(53)\quad S_1=\frac{1-x}{1+x^2}\cdot\cfrac{p}{1+qy+\cfrac{p'y^2}{1+q'y+\cfrac{p''y^2}{1+q''y+\cdots+\cfrac{p^{(n-1)}y^2}{1+q^{(n-1)}y}}}}.$$

Zum Zwecke einer übersichtlichen Darstellung der Verwandlung in den „erzeugenden Bruch" setzt Lagrange (Seite 586)

$$(54)\quad \begin{cases} \psi &= 1 \\ \psi' &= 1+q^{(n-1)}y \\ \psi'' &= (1+q^{(n-2)}y)\psi' + p^{(n-1)}y^2\psi \\ \psi''' &= (1+q^{(n-3)}y)\psi'' + p^{(n-2)}y^2\psi' \\ &\vdots \\ \psi^{(n-1)} &= (1+q'y)\psi^{(n-2)} + p''y^2\psi^{(n-3)} \\ \psi^{(n)} &= (1+qy)\psi^{(n-1)} + p'y^2\psi^{(n-2)}. \end{cases}$$

Dann ist der erzeugende Bruch von (18) in (31)

$$S_1 = \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \frac{p\psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)}}. \tag{55}$$

In dem 2. Faktor

$$\frac{V}{Y} = \frac{p\psi^{(n-1)}}{\psi^{(n)}}$$

ist der Nenner ein Polynom in $y$ vom Grade $n$, dessen von $y$ freies Glied „1“ ist.

Zerlegt man nun diesen Nenner $\psi^{(n)}$ in $n$ einfache Faktoren von der Form

$$1-\omega y, \quad 1-\varrho y, \quad \ldots,$$

(i) wobei dann $\omega$, $\varrho$, ... die Wurzeln der Gleichung

$$\mathbf{(56)} \qquad \frac{\psi^{(n)}}{y^n} = 0, \text{ wenn } \frac{1}{y} = z \text{ gesetzt wird,}$$

sein müssen, so erhält man aus (55) als den „erzeugenden Bruch“ der Reihe (18)

$$S_1 = \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \frac{p\psi^{(n-1)}}{(1-\omega y)(1-\varrho y)\ldots}$$

oder wenn der **2. Faktor in „$n$“ Teilbrüche zerlegt** wird

$$S_1 = \frac{1-x}{1+x^2}\left\{\frac{F}{1-\omega y} + \frac{G}{1-\varrho y} + \ldots\right\}, \tag{57}$$

und da $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

$$S_1 = (1-x)\left\{\frac{F}{1-\omega x+x^2} + \frac{G}{1-\varrho x+x^2} + \cdots\right\}. \tag{58}$$

Dieser „erzeugende Bruch“ der Reihe (18) muß aber, wie ein Vergleich von (22) mit (9) zeigt, zum Nenner dasselbe Polynom haben, wie der erzeugende Bruch der Reihe (2).

Dann folgt aber, daß auch die Teilnenner in (8) denen in (58)
(k) identisch gleich sein müssen, wenn der Koeffizient des allgemeinen Gliedes der Reihe (2) die Form (1) haben soll.

Dieser Vergleich liefert folgende $n$ Gleichungen

$$\begin{aligned} 1-\omega x+x^2 &= 1-2x\cos\alpha+x^2 \\ 1-\varrho x+x^2 &= 1-2x\cos\beta+x^2 \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha &= \omega \\ 2\cos\beta &= \varrho \\ \vdots \quad &= \vdots \end{aligned} \tag{59}$$

Aus (59) lassen sich die Winkel $\alpha, \beta, \ldots$ nur dann reell be-
(l) stimmen, wenn $\omega, \varrho, \ldots \begin{matrix} \leq +2 \\ \geq -2 \end{matrix}$, d. h. wenn alle $n$ Wurzeln der Gleichung (56) zwischen $+2$ und $-2$ liegen. (2. Kriterium.)

Ganz ähnlich wie mit der Reihe (18) verfährt man mit der Reihe (19).

Man erhält, wie durch Vergleich von (32) mit (31) hervorgeht, einen Kettenbruch wie in (47), nur tritt dort der Faktor $1+x$ an die Stelle von $1-x$.

Man wird also mit der Reihe (19) ganz ebenso, wie in (h) für
(m) die Reihe (18) angegeben, verfahren, wobei nur als erster Dividend $1+x$ statt $1-x$ genommen werden muß.

Die dann ermittelten Größen

$$(p),\ (p)',\ (p)'',\ (p)''',\ \ldots,\ (p)^{(n-1)}$$

und

$$(q),\ (q)',\ (q)'',\ (q)''',\ \ldots,\ (q)^{(n-1)}$$

(n) dienen dann wie in (54) zur Bestimmung des Faktors $\frac{V'}{Y}$ in (32)

$$\frac{V'}{Y} = \frac{(p)(\psi)^{(n-1)}}{(\psi)^{(n)}}.$$

Dann folgt aus der Übereinstimmung der Nenner in (22) und (23), natürlich unter Voraussetzung (1) für die Reihe (2), daß

$$(\psi)^{(n)} = \psi^{(n)}.$$

(o) Diese Übereinstimmung liefert eine gute Rechenprobe. Die Wurzeln

$$(\omega),\ (\varrho),\ \ldots,$$

der Gleichung

$$\frac{(\psi)^{(n)}}{y^n} = 0, \quad \text{wenn } \frac{1}{y} = z \text{ gesetzt wird,}$$

die somit mit jenen der Gleichung (56) übereinstimmen, liefern dann ähnlich wie in (58)

$$(60) \qquad S_2 = (1+x)\cdot\left\{\frac{(F)}{1-(\omega)x+x^2} + \frac{(G)}{1-(\varrho)x+x^2} + \cdots\right\},$$

(p) wobei die Koeffizienten $(F), (G) \ldots$ wie in (57) durch die Zerlegung des Bruches $\frac{(p)(\psi)^{(n-1)}}{(\psi)^{(n)}}$ in Teilbrüche entstehen. Hat man bisher die Winkel $\alpha, \beta, \ldots$ (auf doppelte Art) und auch die Größen

$$F,\ G,\ \ldots$$

und

$$(F),\ (G),\ \ldots$$

wobei im allgemeinen

$$\begin{array}{c} F \mp (F) \\ G \mp (G) \\ \vdots \mp \vdots \end{array}$$

bestimmt, so folgt jetzt durch Addition aus (58) und (60)

$$(61)\qquad \frac{S_1 + S_2}{2} = \mathrm{T} + \mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \cdots =$$

$$= \frac{\frac{F+(F)}{2} - \frac{F-(F)}{2}x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \frac{\frac{G+(G)}{2} - \frac{G-(G)}{2}x}{1 - 2x\cos\beta + x^2} + \cdots.$$

Vergleicht man nun diese Gleichung (61) mit (8), so findet man

$$(62)\qquad A\sin a = \frac{F+(F)}{2}; \qquad (64)\qquad B\sin b = \frac{G+(G)}{2};$$

$$(63)\quad A\sin(a-\alpha) = \frac{F-(F)}{2}; \qquad (65)\quad B\sin(b-\beta) = \frac{G-(G)}{2}.$$

Aus (63) ergibt sich mit (62)

$$(66)\quad A\cos a = \frac{\frac{F+(F)}{2}\cos\alpha - \frac{F-(F)}{2}}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{(F)\cos^2\frac{\alpha}{2} - F\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{(F)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{2}$$

und aus (62) und (66)

$$(67)\qquad \mathbf{tg}\,a = \frac{F + (F)}{(F)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Durch Quadrieren und Addition folgt aus (62) und (66)

$$A^2 = \frac{[F+(F)]^2 + \left[(F)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right]^2}{4}$$

und

$$(68)\qquad A = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} + \frac{(F)^2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

(L. S. 587.)

Ganz ebenso rechnet man aus (64) und (65)

$$\operatorname{tg} b = \frac{G + (G)}{(G)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} - G\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} \tag{69}$$

und

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{G^2}{\cos^2\frac{\beta}{2}} + \frac{(G)^2}{\sin^2\frac{\beta}{2}}}. \tag{70}$$

Man erkennt aus dieser Entwicklung, daß man zur Berechnung der Winkel $\alpha, \beta, \ldots$ nur eine der Reihen, (18) „oder“ (19) benötigt, während zur Auffindung der Größen

$$a, b, \ldots$$

und

$$A, B, \ldots$$

„beide“ Reihen heranzuziehen sind. Mit Hilfe der Reihe (18) werden nämlich nur die Größen

$$F, G, \ldots$$

gefunden. Erst (19) liefert die Größen

$$(F), (G), \ldots.$$

### 2. Methode.

Nun kann man ganz ähnlich wie aus (18) und (19) auch aus (20) und (21) die Größen

$$\alpha, \beta, \gamma \ldots$$
$$a, b, \quad \ldots$$
$$A, B, \quad \ldots$$

finden. Man wird bei diesen letzten Reihen zunächst, wie in (h) angegeben ist, verfahren, nur ist, wie (33) und (34) zeigt, als erster Dividend bei (20)

$$1 - x^2$$

und bei (21)

$$1$$

zu nehmen.

Dann werden ebenso wie durch (54) die „erzeugenden Brüche“

$$S_3 = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} \cdot \frac{p_1 \psi_1^{(n-1)}}{\psi_1^{(n)}} \tag{71}$$

und

$$S_4 = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \frac{(p_1)(\psi_1)^{(n-1)}}{(\psi_1)^{(n)}} \tag{72}$$

bestimmt, wobei sich (als Rechenprobe) ergeben muß

$$(\psi_1)^{(n)} = \psi_1^{(n)} = (\psi)^{(n)} = \psi^{(n)}.$$

Hat man weiter die Nenner $\psi_1^{(n)}$ und $(\psi_1)^{(n)}$ in $n$ einfache Faktoren von der Form

$$1 - \omega_1 y, \quad 1 - \varrho_1 y, \quad \dots$$

bzw.

$$1 - (\omega)_1 y, \quad 1 - (\varrho_1) y, \quad \dots$$

zerlegt, so muß auch

$$\begin{aligned} (\omega_1) &= \omega_1 = (\omega) = \omega \\ (\varrho_1) &= \varrho_1 = (\varrho) = \varrho \\ \vdots &= \vdots = \vdots = \vdots \end{aligned}$$

Die 2. Faktoren in (71) und (72) werden hierauf wie in (57) in je $n$ Teilbrüche zerlegt, wodurch die Größen

$$\begin{aligned} &F_1, \quad G_1, \quad \dots \\ &(F_1), \quad (G_1), \quad \dots \end{aligned}$$

nämlich die Zähler dieser Teilbrüche bestimmt werden. Führt man wieder $x$ durch $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ ein, so erhält man zwei Ausdrücke ähnlich jenen in (58) und (60)

$$(73) \qquad S_3 = (1-x^2)\left\{\frac{F_1}{1-\omega_1 x + x^2} + \frac{G_1}{1-\varrho_1 x + x^2} + \cdots\right\}$$

$$(74) \qquad S_4 = \frac{(F_1)}{1-(\omega_1)x + x^2} + \frac{(G_1)}{1-(\varrho_1)x + x^2} + \cdots$$

und dann wie aus (59)

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\omega_1}{2}; & \cos\alpha &= \frac{(\omega_1)}{2}; \\ \cos\beta &= \frac{\varrho_1}{2}; & \cos\beta &= \frac{(\varrho_1)}{2}. \\ \vdots &= \vdots & \vdots &= \vdots \end{aligned}$$

Multipliziert man Gleichung (74) mit $x$ und addiert Gleichung (73), so findet man

$$(75) \qquad S_3 + xS_4 = \mathrm{T} + 2(\mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \mathrm{T}'''x^3 + \cdots) = \\ = \frac{F_1 + (F_1)x - F_1(x^2)}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \frac{G_1 + (G_1)x + G_1 x^2}{1 - 2x\cos\beta + x^2} + \cdots.$$

Hieraus für $x = 0$

$$\mathrm{T} = F_1 + G_1 + \cdots,$$

welche Gleichung zu (75) addiert folgendes ergibt

$$(76) \qquad \mathrm{T} + \mathrm{T}'x + \mathrm{T}''x^2 + \mathrm{T}'''x^3 + \cdots = \\ = \frac{F_1 - \left[F_1\cos\alpha - \dfrac{(F_1)}{2}\right]x}{1 - 2x\cos\alpha + x^2} + \frac{G_1 - \left[G_1\cos\beta - \dfrac{(G_1)}{2}\right]x}{1 - 2x\cos\beta + x^2} + \cdots.$$

Vergleicht man diese Gleichung (76) wieder mit (8), so folgt

(77) $A \sin\alpha = F_1$; (79) $B \sin b = G_1$;

(78) $A \sin(a-\alpha) = F_1 \cos\alpha - \frac{(F_1)}{2}$, (80) $B \sin(b-\beta) = G_1 \cos\beta - \frac{(G_1)}{2}$.

Aus (78) folgt mit (77)

(81) $$A \cos\alpha = \frac{(F_1)}{2 \sin\alpha}$$

und aus (77) und (81)

(82) $$\operatorname{tg} a = \frac{2 F_1 \sin\alpha}{(F_1)};$$

und

(83) $$A = \sqrt{F_1^2 + \frac{(F_1)^2}{4 \sin^2\alpha}}.$$

Ebenso aus (79) und (80)

(82a) $$\operatorname{tg} b = \frac{2 G_1 \sin\beta}{(G_1)};$$

und

(83a) $$B = \sqrt{G_1^2 + \frac{(G_1)^2}{4 \sin^2\beta}}.$$

Es ist noch zu bemerken, daß im allgemeinen die beiden in der Entwicklung zu (18) angegebenen Kriterien genügen, da alle weiteren für die Entwicklung zu (19), (20) und (21) auftretenden dann mit eingeschlossen sind. Doch kann es in Sonderfällen vorkommen, daß eine der Kettendivisionen früher aufgeht als sie es eigentlich tun
(r) sollte. Dieser Fall tritt dann ein, wenn der „erzeugende Bruch" der betreffenden Reihe so beschaffen ist, daß Zähler und Nenner einen Faktor gemeinsam haben. Von den aus den 4 Reihen sich ergebenden Ordnungszahlen der rekurrenten Reihe (2) ist dann immer die größte von ihnen als die richtigste zu wählen. (L. Seite 583 Remarque II.)
(s) Aus dem eben angeführten Grunde ist es bei genaueren Untersuchungen gut, nicht nur die 1. Methode [mit Reihenpaar (18), (19)], sondern auch die 2. Methode [mit Reihenpaar (20), (21)] anzuwenden.

---

Lagrange wendet dann (Seite 588 und folg.) diese beiden Methoden auf das Beispiel der Zeitgleichung an und vergleicht die so erhaltenen Resultate mit den Formeln der Theorie. Er findet mit Hilfe der 1. Methode

$$\alpha = 69^\circ 45'; \quad \beta = 140^\circ 2';$$
$$a = 60^\circ 30'; \quad b = 140^\circ 6';$$
$$A = 451; \quad B = 591;$$

mit Hilfe der 2. Methode

$$\alpha = 69°49'; \quad \beta = 140°1';$$
$$a = 60°28'; \quad b = 140°7';$$
$$A = 451 \; ; \quad B = 591 \; .$$

Diese Werte sind indessen nur angenähert richtig, weil Lagrange schon nach der 2. Division abbricht und den Rest, der klein ist, vernachlässigt.

Aber selbst wenn er diesen Rest nicht vernachlässigt hätte, würde dadurch voraussichtlich nicht viel gewonnen sein; Lagrange bemerkt nämlich (Seite 621), daß man nur dann mit Hilfe dieser Methode die wahre Gesetzmäßigkeit findet, wenn die gegebenen vorliegenden Zahlen auch wirklich genau und streng richtig sind. Die Übereinstimmung obiger Zahlen stützt diese Behauptung. Wenn aber die angegebenen Zahlen nur angenähert richtig sind, wird es Grenzen geben, über die man die Operationen nicht fortsetzen darf, ohne fürchten zu müssen, sich zu verirren.

Es erstrecke sich nämlich, so führt Lagrange aus (Seite 622), die Genauigkeit der Glieder der Reihe $T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \ldots$, um die es sich handelt, bis zur $(\lambda)^{\text{ten}}$ Dezimale incl. Der Wert des ersten Gliedes $T = p$, mit dem die übrigen Glieder zu dividieren (t) sind [siehe (h)], liegt zwischen $10^{\omega}$ und $10^{\omega+1}$. Dann werden nach der Division mit $p$ die Glieder der Reihe nur genau bis zur $(\lambda + \omega)^{\text{ten}}$ Dezimale incl. sein usf.

Im vorliegenden Falle sind nun die Zahlen der Tabelle nur angenähert. Lagrange bestimmt durch das angedeutete Verfahren, daß der 2. Rest höchstens bis zur 2. Dezimale incl. sicher richtig ist. Da nun die Mehrzahl der Glieder des 2. Restes erst in der 3. Dezimale geltende Ziffern besitzt, so muß dieser Rest als unsicher betrachtet und folglich die Kettendivision abgebrochen werden.

Die Theorie liefert die richtigen Zahlen

$$\alpha = 70°; \quad \beta = 140°;$$
$$a = 61°; \quad b = 140°;$$
$$A = 462°; \quad B = 593°;$$

in denen allerdings noch Integrationskonstanten stecken, deren Werte nicht aus der Theorie, sondern nur aus den Beobachtungen entnommen werden können.

Zum Schlusse sei noch hervorgehoben, daß z. B. aus

$$\cos\alpha = \frac{\omega_1}{2}$$

der Winkel $\alpha$ unendlich vieldeutig bestimmt ist. Insbesondere hat man aber neben

$$\text{I. } \alpha = \alpha_1 \text{ noch}$$
$$\text{II. } \alpha = 360^\circ - \alpha_1 \text{ oder } \alpha = -\alpha_1.$$

Aus (82) folgt für I. $\alpha = \alpha_1$ neben

1. $a = a_1$, wozu nach (77) ein Wert $A = +A_1$ gehört, noch
2. $a = 180^\circ + a_1$, „ „ „ „ „ $A = -A_1$ „ .

Ähnlich folgt aus (82) für II. $\alpha = 360^\circ - \alpha_1$

3. $a = 180^\circ - a_1$, wozu ein Wert $A = +A_1$ gehört und
4. $a = 360^\circ - a_1$, „ „ „ $A = -A_1$ „ .

Es fragt sich nun, ob die 4 Wertetripel:

$$\begin{gathered} a_1,\ a_1,\ A_1;\ a_1,\ 180^\circ + a_1,\ -A_1; \\ 360^\circ - a_1,\ 180^\circ - a_1,\ A_1; \\ 360^\circ - a_1,\ 360^\circ - a_1,\ -A_1 \end{gathered}$$

immer denselben Ausdruck $A \sin(a + m\alpha)$ liefern. Dies trifft zu; denn es ist

$$\begin{aligned} A_1 \sin(a_1 + m\alpha_1) &= -A_1 \sin(180^\circ + a_1 + m\alpha_1) \\ &= A_1 \sin(180^\circ - a_1 + m\,(360^\circ - \alpha_1)) \\ &= -A_1 \sin(360^\circ - a_1 + m\,(360^\circ - \alpha_1)). \end{aligned}$$

Setzt man neben dieses Gleichungssystem noch

$$A_1 \sin(a_1 + m\alpha_1) = A_1 \sin(a_1 + m(\alpha_1 + 2\varkappa \cdot 180^\circ)); \quad \varkappa = 1, 2, 3, \ldots$$

so erkennt man, daß die Aufgabe, trotz der Vieldeutigkeit der Winkel $\alpha$ aus $\cos\alpha = \frac{\omega}{2}$, stets eindeutig bestimmt ist.

Anders jedoch wird es, wenn man die Periode bestimmen will. Diese läßt sich aus den bisherigen Resultaten nicht eindeutig ermitteln. Man findet sie in jedem einzelnen Falle etwa dadurch, daß man einen oder mehrere Funktionswerte, die zwischen den in der Tabelle angegebenen Funktionswerten liegen, durch die erhaltene Formel [im vorliegenden Falle $A_1 \sin(a_1 + m\alpha_1)$ oder eine der anderen oben angegebenen Formeln] auszudrücken sucht, indem man nur für „$m$“ den richtigen Bruch setzt. Im allgemeinen wird sich dann hierzu nur eine der Formeln verwenden lassen, „wenn man überhaupt eine solche zur Berechnung der Zwischenwerte verwenden will“.

(Fortsetzung folgt.)

## II. Teil.

Im folgenden habe ich diese von Lagrange gegebenen Methoden vorerst auf drei einfache Beispiele angewendet.

### 1. Beispiel.

Beim 1. Beispiel wurden aus der Funktion

$$T^{(m)} = A \sin(a + m\alpha) + B \sin(b + m\beta) =$$
$$= \sin(90° + 90° m) + 2 \sin(144° + 144° m)$$

zu den Argumenten $m = -5$ bis $m = +5$ die entsprechenden Funktionswerte auf 3 Dezimalen berechnet, wie dies aus der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

| $m$ | $\sin(90° + 90° m)$ | $2\sin(144° + 144° m)$ | $T^{(m)}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $-5$ | 0 | $+1{,}176$ | $+1{,}176$ | $^{V}T$ |
| $-4$ | $+1$ | $-1{,}902$ | $-0{,}902$ | $^{IV}T$ |
| $-3$ | 0 | $+1{,}902$ | $+1{,}902$ | $'''T$ |
| $-2$ | $-1$ | $-1{,}176$ | $-2{,}176$ | $''T$ |
| $-1$ | 0 | 0 | 0 | $'T$ |
| 0 | $+1$ | $+1{,}176$ | $+2{,}176$ | T |
| $+1$ | 0 | $-1{,}902$ | $-1{,}902$ | T′ |
| $+2$ | $-1$ | $+1{,}902$ | $+0{,}902$ | T″ |
| $+3$ | 0 | $-1{,}176$ | $-1{,}176$ | T‴ |
| $+4$ | $+1$ | 0 | $+1$ | $T^{IV}$ |
| $+5$ | 0 | $+1{,}176$ | $+1{,}176$ | $T^{V}$ |

### 1. Methode.

Bei Anwendung der 1. Methode bildet man zuerst die Reihe $S_1$ in (18)

$$S_1 = \overset{p\,[0{,}5]}{\overbrace{2{,}176}} - 4{,}078x + 2{,}804x^2 - 2{,}078x^3 + 2{,}176x^4 + \cdots [1{,}0],$$

und verfährt mit $S_1$ wie unter $(h)$ angegeben. Es wird

$$p = 2{,}176\ [0{,}5]$$
$$S = 1 - 1{,}874x + 1{,}289x^2 - 0{,}954x^3 + x^4 + \cdots [0{,}46$$

| | $q\,[0{,}46]$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}874}x$ |
| 1. Divisor $S$ | $1 - 1{,}874x + 1{,}289x^2 - 0{,}954x^3 + \quad x^4 + \cdots [0{,}46]$ |
| 1. Dividend | $1 - \quad x$ |
| $-(1+x^2)\cdot S$ | $-1 + 1{,}874x - 2{,}289x^2 + 2{,}828x^3 + 2{,}289x^4 + \cdots [0{,}92$ |
| add. | $+0{,}874x - 2{,}289x^2 + 2{,}828x^3 - 2{,}289x^4 + \cdots [0{,}92$ |
| $-q\cdot x\cdot S$ | $-0{,}874x + 1{,}640x^2 - 1{,}127x^3 + 0{,}834x^4 + \cdots [1{,}26$ |
| add. $p'S'x^2$ | $-\underbrace{0{,}649}_{p'}x^2 + 1{,}701x^3 - 1{,}455x^4 + \cdots [2{,}18]$ |

Der durch $p'x^2$ dividierte Rest heißt

$$S' = 1 - 2{,}624x + 2{,}244x^2 + \cdots [3{,}37]$$

| | $q'\,[3{,}83]$ |
|---|---|
| 2. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}750}x$ |
| 2. Divisor $S'$ | $1 - 2{,}624x + 2{,}244x^2 + \cdots [3{,}37]$ |
| 2. Dividend $S$ | $1 - 1{,}874x + 1{,}289x^2 + \cdots [0{,}46$ |
| $-(1+x^2)\cdot S'$ | $-1 + 2{,}624x - 3{,}244x^2 + \cdots [3{,}37]$ |
| add. | $+0{,}750x - 1{,}955x^2 + \cdots [3{,}83]$ |
| $-q'xS'$ | $-0{,}750x + 1{,}967x^2 + \cdots [12{,}60$ |
| add. $p''S''x^2$ | $+\underbrace{0{,}012}_{p''}x^2 + \cdots [16{,}4]$ |

Eine genauere Verfolgung der möglichen Fehler (die von Lagrange unter (t) gegebene Methode (L. S. 621) der Bestimmung der Genauigkeitsgrenzen reicht nicht aus) zeigt, daß der letzte Rest unsicher ist; daher wird es gut sein, jetzt die Kettendivision abzubrechen.

Die in Eckklammern in obiger Rechnung angegebenen Zahlen sind die größten der möglichen Fehler in Einheiten der letzten (dritten) Dezimale. Bei ihrer Berechnung wurde ausgegangen von der Über-

legung, daß die in der Tabelle angegebenen Zahlen $T^{(m)}$ nur auf 0,5 Einheiten der dritten Dezimale und deshalb die Koeffizienten der Glieder der Reihe $S_1$ auf 1,0 solche Einheiten richtig zu sein brauchen. In der Reihe $S$ wird dieser Fehler mit 2,176 dividiert. Die weitere Verfolgung gestaltet sich verhältnismäßig einfach. Der Fehler in der Reihe $-(1+x^2)S$ ist das Doppelte von dem in $S$. Derjenige in $-qxS$ werde als Summe des 1,874fachen Fehlers von $q$ und des 0,874fachen Fehlers von $S$ gefunden, so daß der Fehler des 1. Restes im ungünstigsten Falle 2,18 Einheiten der dritten Dezimale betragen könnte.

In der Reihe $S'$ beträgt der Fehler wegen der vorgenommenen Division mit 0,647 bereits [3,37], und schließlich zeigt sich, daß man für $p''$ mit einem möglichen Fehler von 16 Einheiten der letzten
(u) Dezimale zu rechnen hat, womit gezeigt ist, daß es wohl wenig Zweck hätte, die Kettendivision noch weiter fortzuführen.

Mit Hilfe der gewonnenen Größen $p'$, $q$, $q'$ folgt nun aus (54)

$$\psi'' = (1+qy)(1+q'y)+p'y^2 = 1+(q+q')y+(qq'+p')y^2,$$

und nach (i) die Größen $\omega$ und $\varrho$ aus (56)

$$z^2+(q+q')z+(qq'+p')=0.$$

Also

$$z=\frac{\omega}{\varrho}=-\frac{q+q'}{2}\pm\frac{\sqrt{(q+q')^2-4(qq'+p')}}{2}$$

oder

$$(84)\qquad z=\frac{\omega}{\varrho}=\frac{-(q+q')}{2}\pm\frac{\sqrt{(q-q')^2-4p'}}{2}.$$

Nun ergibt sich aus (84)

$$z=\frac{\omega}{\varrho}=\frac{-1{,}624}{2}\pm\frac{\sqrt{0{,}124^2+2{,}596}}{2}=-0{,}812\pm\frac{\sqrt{0{,}015+2{,}596}}{2}$$

$$(85)\quad z=\frac{\omega}{\varrho}=-0{,}812\pm0{,}808$$

$$(86)\quad \begin{matrix}\omega=-0{,}004\ [2{,}9]\\ \varrho=-1{,}620\ [0{,}6].\end{matrix}$$

Handelt es sich nur um die Bestimmung der Perioden $\frac{2\pi}{\alpha}$ und
(v) $\frac{2\pi}{\beta}$, so kann jetzt $\alpha$ und $\beta$ aus (59), nach (l) reell, bestimmt werden, wodurch die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist.

Die Verfolgung der möglichen Fehler setzt im gegebenen Falle voraus, daß die Zahlen der dritten Dezimale alle genau bestimmt

wurden. In Wirklichkeit wurde aber obige Rechnung so ausgeführt, daß wohl auf 3 Einheiten, nicht aber auf 0,5 Einheiten der letzten Dezimale genau gerechnet wurde. Es kann deshalb nicht wunder nehmen, wenn in (86) $\omega$ von seinem wahren Werte $\omega = 0$ statt höchstens um $\lceil 3 \rceil$, um [4] Einheiten abweicht. Die durch die Zahlenrechnung entstehenden Fehler kann man vermeiden, wenn man die Rechenoperationen alle mit einigen Dezimalstellen mehr durchführt. Indessen zeigt die Praxis auch im vorliegenden Falle, daß man, wenn es nicht auf die größtmögliche Genauigkeit ankommt, sich ruhig mit einer geringeren Anzahl von Dezimalstellen begnügen kann.

Um auch die Größen $a$, $b$ und $A$, $B$ bestimmen zu können, bildet man weiter die Reihe $S_2$ in (19)

$$S_2 = \overbrace{2{,}176}^{(p)} + 0{,}274x - x^2 - 0{,}274x^3 - 0{,}176x^4 + \cdots$$

und verfährt mit $S_2$ wie unter (m) angegeben. Es wird

$$(p) = 2{,}176$$
$$(S) = 1 + 0{,}126x - 0{,}459x^2 - 0{,}126x^3 - 0{,}081x^4 + \cdots$$

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q)}$ |
| 1. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}874}x$ |
| 1. Divisor $(S)$ | $1 + 0{,}126x - 0{,}459x^2 - 0{,}126x^3 - 0{,}081x^4 + \cdots$ |
| 1. Dividend | $1 + \quad x$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S)$ | $-1 - 0{,}126x - 0{,}541x^2 + 0{,}000x^3 - 0{,}540x^4 + \cdots$ |
| add. | $+ 0{,}874x - 0{,}541x^2 + 0{,}000x^3 + 0{,}540x^4 + \cdots$ |
| $-qx(S)$ | $- 0{,}874x - 0{,}110x^2 + 0{,}402x^3 + 0{,}110x^4 + \cdots$ |
| $(p')(S')x^2$ add. | $- \underbrace{0{,}651}_{(p')}x^2 + 0{,}402x^3 + 0{,}650x^4 + \cdots$ |

Der durch $(p')x^2$ dividierte Rest heißt $(S') = 1 - 0{,}618x + \cdots$

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q')}$ |
| 2. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}744}x$ |
| 2. Divisor $(S')$ | $1 - 0{,}618x - 0{,}998x^2 + \cdots$ |
| 2. Dividend $(S)$ | $1 + 0{,}126x - 0{,}459x^2 + \cdots$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S')$ | $-1 + 0{,}618x - 0{,}002x^2 + \cdots$ |
| add. | $0{,}744x - 0{,}461x^2 + \cdots$ |
| $-q'x(S')$ | $- 0{,}744x + 0{,}460x^2 + \cdots$ |
| $p''(S'')x^2$ add. | $- \underbrace{0{,}001}_{(p'')}x^2 + \cdots$ |

Da $|(p'')| < |p''|$, so kann man hieraus schon jetzt schließen, daß die mit Hilfe der Größen $(p')$, $(q)$, $(q')$ gewonnenen Größen $(\omega)$ und $(\varrho)$ genauer mit ihren wahren Werten übereinstimmen werden, als die mit Hilfe der Größen $p'$, $q$, $q'$ gewonnenen Größen $\omega$ und $\varrho$ mit ihren wahren Werten. Da nun nach (o) $(\omega) = \omega$ und $(\varrho) = \varrho$,

(w) so werden sich nach (v) die Perioden $\frac{2\pi}{\alpha}$ und $\frac{2\pi}{\beta}$ genauer aus der 2. Rechnung mit Hilfe der Größen $(p')$, $(q)$ und $(q')$ ergeben.

In der Tat findet man zunächst mit (54)

$$(\psi'') = 1 + ((q) + (q'))y + ((q)(q') + (p'))y^2$$

und nach (o) die Größen $(\omega)$ und $(\varrho)$ aus

$$z^2 + ((q) + (q'))z + ((q)(q') + (p')) = 0.$$

Also

$$z = \frac{(\omega)}{(\varrho)} = \frac{-((q)+(q'))}{2} \pm \frac{\sqrt{((q)-(q'))^2 - 4(p')}}{2} = \frac{-1{,}618}{2} \pm \frac{\sqrt{0{,}13^2 + 2{,}604}}{2}.$$

Hieraus

(87)
$$\begin{aligned} (\omega) &= -0{,}809 + 0{,}810 = +0{,}001 \\ (\varrho) &= -0{,}809 - 0{,}810 = -1{,}619. \end{aligned}$$

Nach (59) ist dann wegen (o)

(88)
$$\cos\alpha = \frac{\omega}{2} = \frac{(\omega)}{2} = \frac{0{,}001}{2} = 0{,}0005$$

der wahrscheinlichere Wert für $\cos\alpha$, der dem wahren Werte $\cos\alpha = 0$ näher kommt als der Wert aus (86)

$$\cos\alpha = \frac{\omega}{2} = \frac{-0{,}004}{2} = -0{,}002.$$

Aus (88) folgt

(89)
$$\alpha = 89^\circ 58'; \quad (270^\circ 2')$$

und aus

$$\cos\beta = \frac{(\varrho)}{2} = -0{,}8095$$

(90)
$$\beta = 144^\circ 3'; \quad (215^\circ 57')$$

welche Werte mit ihren wirklichen Werten auf $2'$ bzw. $3'$ übereinstimmen.

Um die Größen $a$, $b$, $A$, $B$ berechnen zu können, sind nötig die Werte von $F$, $G$, $(F)$, $(G)$.

$F$ und $G$ findet man durch Zerlegung des 2. Faktors von (55) in 2 Teilbrüche. Es wird nach (54), (55) und (57)

$$\frac{p\psi'}{\psi''} = \frac{p(1+q'y)}{(1+qy)(1+q'y)+p'y^2} = \frac{F}{1-\omega y} + \frac{G}{1-\varrho y},$$

oder wenn $\frac{1}{y} = z$ gesetzt wird,

$$\frac{p(z+q')}{(z+q)(z+q')+p'} = \frac{F}{z-\omega} + \frac{G}{z-\varrho}$$

oder nach (i)

$$\frac{p(z+q')}{(z-\omega)(z-\varrho)} = \frac{F}{z-\omega} + \frac{G}{z-\varrho}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $z-\omega$ bzw. $z-\varrho$ und, setzt nachträglich $z=\omega$ bzw. $z=\varrho$, so wird

$$F = \frac{p(\omega+q')}{\omega-\varrho} \tag{91}$$

$$G = \frac{p(\varrho+q')}{\varrho-\omega}. \tag{92}$$

Ganz ähnlich wird nach (p)

$$(F) = \frac{(p)((\omega)+(q'))}{(\omega)-(\varrho)} \tag{93}$$

$$(G) = \frac{(p)((\varrho)+(q'))}{(\varrho)-(\omega)}. \tag{94}$$

Im vorliegenden Falle ergibt sich aus (91) und (92)

$$F = \frac{2{,}176 \cdot 0{,}746}{1{,}616} = 1{,}004$$

$$G = \frac{2{,}176 \cdot -0{,}870}{-1{,}616} = 1{,}171$$

und aus (93) und (94)

$$(F) = \frac{2{,}176 \cdot 0{,}745}{1{,}620} = 1{,}001$$

$$(G) = \frac{2{,}176 \cdot -0{,}875}{-1{,}620} = 1{,}176.$$

Hier wird angenähert $F = (F)$ und $G = (G)$. Das ist indessen nicht allgemein gültig, sondern nur ein besonderer Fall. In der Tat folgt für $F = (F)$ aus (67)

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg} \alpha .$$

Hieraus

$$a = \alpha$$

und ganz ähnlich aus (69) für $G = (G)$

$$b = \beta ,$$

was gerade beides im gegebenen Falle zutrifft.

Aus (67) wird

$$\operatorname{tg} a = \frac{2{,}005}{1{,}001 \operatorname{ctg} 44^\circ 59' - 1{,}004 \operatorname{tg} 44^\circ 59'} = \frac{2{,}005}{1{,}002 \cdot 1{,}003} = \frac{2{,}005}{-0{,}001} = -2{,}005$$

$$\boldsymbol{a = 90^\circ 2'}$$

aus (68)

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1{,}008}{0{,}7073^2} + \frac{1{,}002}{0{,}7069^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2{,}015 + 2{,}006} = \frac{1}{2} 2{,}005 = \mathbf{1{,}003}$$

aus (69)

$$\operatorname{tg} b = \frac{2{,}347}{1{,}176 \operatorname{ctg} 72^\circ 1{,}5' - 1{,}171 \operatorname{tg} 72^\circ 1{,}5'} = \frac{2{,}347}{0{,}381 - 3{,}609} = \frac{2{,}347}{-3{,}228} = -0{,}728$$

$$180 - b = 36^\circ 3'$$

$$\boldsymbol{b = 143^\circ 57'}$$

und aus (70)

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1{,}371}{0{,}095} + \frac{1{,}382}{0{,}905}} = \frac{1}{2} \sqrt{14{,}43 + 1{,}53} = \mathbf{1{,}998}.$$

Die Berechnung der Größen $\alpha$, $\beta$, $a$, $b$, $A$, $B$ erfolgte wegen (w) mit Hilfe der Größen $(\omega)$ und $(\varrho)$ ohne irgendwelche Berücksichtigung von $\omega$ und $\varrho$.

(x) Lagrange nimmt das arithmetische Mittel aus $\omega$ und $(\omega)$ sowie aus $(\varrho)$ und $\varrho$. Führt man die Berechnung mit den so erhaltenen Mittelwerten

$$\bar{\omega} = -0{,}0015 \text{ und } \bar{\varrho} = -1{,}6195$$

durch, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \alpha &= 90^\circ 3' \\ \beta &= 143^\circ 56' \\ a &= 90^\circ 7' \\ b &= 143^\circ 50' \\ A &= 1{,}004 \\ B &= 2{,}03, \end{aligned}$$

Zahlen, die sich mehr als die oben gefundenen von den wahren Werten entfernen.

---

Nach der 2. Methode bildet man zunächst die Reihe $S_3$ in (20)

$$S_3 = 2{,}176 - 1{,}902x - 1{,}274x^2 + 0{,}726x^3 + 0{,}098x^4 + \cdots$$

und verfährt im übrigen wie (q) lehrt. Es wird $p_1 = 2{,}176$

$$\underline{S} = 1 - 0{,}874x - 0{,}586x^2 + 0{,}334x^3 + 0{,}045x^4 + \cdots$$

| | $q_1$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}874}x$ |
| 1. Divisor $S$ | $1 - 0{,}874x - 0{,}586x^2 + 0{,}334x^3 + 0{,}045x^4 + \cdots$ |
| 1. Dividend | $1 \qquad - \qquad x^2$ |
| $-(1+x^2)\cdot\underline{S}$ | $-1 + 0{,}874x - 0{,}414x^2 + 0{,}540x^3 + 0{,}541x^4 + \cdots$ |
| add. | $+ 0{,}874x - 1{,}414x^2 + 0{,}540x^3 + 0{,}541x^4 + \cdots$ |
| $-q_1x\cdot\underline{S}$ | $- 0{,}874x + 0{,}764x^2 + 0{,}512x^3 - 0{,}292x^4 + \cdots$ |
| add. $p_1'\cdot x^2\cdot\underline{S}'$ | $- \underbrace{0{,}650}_{p_1'}x^2 + 1{,}052x^3 + 0{,}249x^4 + \cdots$ |

Der durch $p_1'x^2$ dividierte Rest heißt

$$\underline{S}' = 1 - 1{,}620x - 0{,}383x^2 + \cdots$$

| | $q_1'$ |
|---|---|
| 2. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{0{,}746}x$ |
| 2. Divisor $\underline{S}'$ | $1 - 1{,}620x - 0{,}383x^2 + \cdots$ |
| 2. Dividend $\underline{S}$ | $1 - 0{,}874x - 0{,}586x^2 + \cdots$ |
| $-(1+x^2)\cdot\underline{S}'$ | $-1 + 1{,}620x - 0{,}617x^2 + \cdots$ |
| add. | $+ 0{,}746x - 1{,}203x^2 + \cdots$ |
| $-q_1'\cdot x\cdot\underline{S}'$ | $- 0{,}746x + 1{,}209x^2 + \cdots$ |
| add. $p_1''x^2\underline{S}''$ | $+ \underbrace{0{,}006}_{p_1''}x^2 + \cdots$ |

Setzt man für $q$, $q'$, $p'$ die Größen $q_1$, $q'_1$, $p'_1$, so erhält man $z_1 = \frac{\omega_1}{\varrho_1}$ aus (84)

$$z_1 = \frac{\omega_1}{\varrho_1} = -0{,}810 \pm \frac{\sqrt{0{,}016 + 2{,}600}}{2} = -0{,}810 \pm 0{,}808$$
$$\omega_1 = -0{,}002$$
$$\varrho_1 = -1{,}618$$

und $F_1$ und $G_1$ aus (91) und (92)

$$F_1 = \frac{2{,}176 \cdot 0{,}744}{+1{,}616} = 1{,}001$$
$$G_1 = \frac{2{,}176 \cdot -0{,}872}{-1{,}616} = 1{,}174.$$

Endlich bildet man noch die Reihe $S_4$ in (21)

$$S_4 = -1{,}902 + 3{,}078x - 3{,}078x^2 + 1{,}902x^3 + 0 + \cdots$$

und verfährt mit ihr wie (q) angibt.

Es wird

$$(p_1) = -1{,}902$$
$$(S) = 1 - 1{,}6181x + 1{,}6181x^2 - x^3 + 0 + \cdots$$

| | $\overbrace{(q_1)}$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1 + x^2 + \overbrace{1{,}6181}x$ |
| 1. Divisor $(S)$ | $1 - 1{,}6181x + 1{,}6181x^2 - x^3 + 0 + \cdots$ |
| 1. Dividend | $1$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S)$ | $-1 + 1{,}6181x - 2{,}6181x^2 + 2{,}6181x^3 - 1{,}6181x^4 + \cdots$ |
| add. | $1{,}6181x - 2{,}6181x^2 + 2{,}6181x^3 - 1{,}6181x^4 + \cdots$ |
| $-(q_1)x\cdot(S)$ | $-1{,}6181x + 2{,}6182x^2 - 2{,}6182x^3 + 1{,}6181x^4 + \cdots$ |
| add. $(p'_1)x^2(S')$ | $+\underbrace{0{,}0001}_{(p'_1)}x^2 - 0{,}0001x^3 + 0{,}0000x^4 + \cdots$ |

Hier trifft das unter (r) Bemerkte zu.

Aus (72) folgt

$$S_4 = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{(p_1)}{1+(q_1)y} = \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{(G_1)}{1-(\varrho_1)y}.$$

Hieraus

$$(G_1) = (p_1) = -1{,}902$$

und

$$(\varrho_1) = -(q_1) = -1{,}6181.$$

Dieser Wert $(\varrho_1)$, der mit $(\varrho)$ und $\varrho$ angenähert und mit $\varrho_1$ vollständig übereinstimmt, muß, wie man aus den kleinen Koeffizienten des Restes $(p_1')x^2(S')$ erkennt, sehr genau sein. In der Tat findet man aus

$$\cos\beta = \frac{(\varrho_1)}{2} = -0{,}80905$$
$$\beta = \mathbf{144°}.$$

Da $|p_1''| > |(p'')|$, so ist es besser, für die endgültige Berechnung von $\alpha$ den Wert $(\omega)$ zugrunde zu legen.

Man hat also mit (89)

$$\alpha = 89°\,58'.$$

Da $(F_1) = 0$, so folgt aus (82)

$$\operatorname{tg} a = \infty$$
$$a = \mathbf{90°},$$

und aus (83)

$$A = F_1 = \mathbf{1{,}001}.$$

Aus $(82^a)$ findet man

$$\operatorname{tg} b = \frac{2 \cdot 1{,}174 \sin 36°}{-1{,}902} = -0{,}725$$
$$b = 180° - 35°\,58' = \mathbf{144°\,2'},$$

endlich aus $(83^a)$

$$B = \sqrt{1{,}174^2 + \frac{1{,}902^2}{4 \sin^2 36°}} = \mathbf{1{,}997}.$$

### 2. Beispiel.

Das 2. Beispiel behandelt einen extremen Fall. Es wurde untersucht, ob und mit welcher Genauigkeit sich die Werte von $\alpha$, $a$, $A$, berechnen lassen, wenn die gegebenen Funktionswerte alle innerhalb der kleinsten Periode derart liegen, daß ihr Intervall „viel kleiner" als diese Periode ist. Die gegebenen Funktionswerte wachsen ziemlich regelmäßig monoton.

Ich wählte wegen des mir schon gerechnet vorliegenden Materials

$$T^{(m)} = 4 \sin\left(\left(52\frac{23}{31}\right)^\circ + \left(4\frac{27}{31}\right)^\circ \cdot m\right) + 5 \sin\left(\left(5\frac{5}{31}\right)^\circ + \left(1\frac{18}{31}\right)^\circ m\right).$$

Zu den Argumenten $m = -5$ bis $m = +5$ wurden wieder die entsprechenden Funktionswerte $T^{(m)}$ diesmal auf 4 Dezimalen angegeben, wie dies aus folgender Tabelle ersichtlich ist.

Die Anwendung der Lagrangeschen Methode liefert hier eine andere einfachere Funktion $T^{(m)}$, woraus folgt, daß die gegebenen Zahlenwerte auch aus dieser einfacheren Funktion erhalten werden können (wenigstens im betrachteten Intervalle) und zwar, wie sich zeigen wird, mit einer Genauigkeit bis zur 3. Dezimale incl.

| $m$ | $4 \sin\left(\left(52\frac{23}{31}\right)^\circ + \left(4\frac{27}{31}\right)^\circ m\right)$ | $5 \sin\left(\left(5\frac{5}{31}\right)^\circ + \left(1\frac{18}{31}\right)^\circ m\right)$ | $T^{(m)}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $-5$ | $+1{,}9017$ | $-0{,}2392$ | 1,6625 | $^{V}T$ |
| $-4$ | 2,1936 | $-0{,}1014$ | 2,0922 | $^{IV}T$ |
| $-3$ | 2,4697 | $+0{,}0366$ | 2,5063 | $'''T$ |
| $-2$ | 2,7280 | $+0{,}1745$ | 2,9025 | $''T$ |
| $-1$ | 2,9666 | 0,3123 | 3,2789 | $'T$ |
| 0 | 3,1837 | 0,4498 | 3,6335 | T |
| $+1$ | 3,3778 | 0,5870 | 3,9648 | T′ |
| $+2$ | 3,5475 | 0,7237 | 4,2712 | T″ |
| $+3$ | 3,6916 | 0,8599 | 4,5515 | T‴ |
| $+4$ | 3,8091 | 0,9954 | 4,8045 | $T^{IV}$ |
| $+5$ | 3,8990 | 1,1303 | 5,0293 | $T^{V}$ |

Die Anwendung der einfacheren 2. Methode zeigt, daß die Kettendivision gleich nach dem 1. Divisionsverfahren aufgeht, so daß bis zur 4. Dez. incl.

$$p_1' S' x^2 = o$$

und bis zur 4. Dez. excl. auch

$$(p_1')(\underline{S'})x^2 = o.$$

Es ergab sich dann

$$\alpha = 4^\circ 37'$$
$$a = 40^\circ 27'$$
$$A = 5{,}600.$$

Die gegebene Funktion läßt sich somit im Intervalle $m = -5$ bis $m = +5$ durch die einfachere Funktion

$$T^{(m)} = 5{,}600 \sin(40^\circ 27' + (4^\circ 37') \cdot m)$$

näherungsweise ersetzen.

Auch die Anwendung der 1. Methode auf das Beispiel zeigt, daß der Rest nach dem 1. Divisionsverfahren, hier sogar bis zur 5. Dez., verschwindet.

Damit gelingt es, ein noch genaueres

$$\alpha = 4°34'$$

zu bestimmen und mit den Ergebnissen der 2. Methode zusammen auch ein genaueres

$$a = 40°9'$$

und

$$A = 5{,}635.$$

Bei der 1. Methode liefert nur die Rechnung mit (18) das günstigte $\alpha$. Die Rechnung mit (19) ergibt einen 1. Rest $(p')(S')x^2$, dessen Koeffizienten nur bis zur 2. Dez. incl. verschwinden. Die berechneten möglichen Fehler erreichen gerade die Größe dieser Koeffizienten. Hieraus folgt aus den Ergebnissen des 1. Beispiels, daß die Kettendivision nicht weiterzuführen ist. Ich habe an dieser Stelle die Richtigkeit dieser Schlußweise nochmals geprüft, indem ich die Kettendivision noch einen Schritt weiter führte. Da zeigte sich nun, daß man dann eine Formel erhält, die weit weniger gute Funktionswerte liefert. Es hat also keinen Sinn, im vorliegenden extremen Fall die Kettendivision nach dem 1. Divisionsverfahren weiter zu führen. Damit zeigt auch dieses Beispiel deutlich, daß die Feststellung der Größenordnung der möglichen Fehler immer ein Mittel ist, festzustellen, wieweit die Kettendivision ohne Bedenken fortgeführt werden darf.

Was die Beantwortung der gestellten Frage anbetrifft, so ist zu sagen, daß durch die angegebenen Zahlen mit 4 Dezimalen höchstens eine Genauigkeit von $\pm 2'$ bis $\pm 1'$ in den Werten des Winkels $\alpha$ verbürgt wird Dabei ist vorausgesetzt, daß die Werte von $p'$, $(p')$, $p_1'$, $(p_1')$ alle $< 0{,}00005$ werden. Weichen aber die Werte dieser Größen auch nur um einige Einheiten der 4. Dezimale von einander ab, so hat dies eine Differenz von beträchtlich mehr Minuten in den Werten der Winkel $\alpha$ im Gefolge. So entspricht z. B. einem Unterschiede von 3 Einheiten der 4. Dezimale bei $p_1'$ und $(p_1')$ ein Unterschied von 46′ in den Werten des Winkels $\alpha$.

Es wurde also festgestellt, daß nur bei sehr kleinen letzten Resten in den vorgenommenen Kettendivisionen hier eine hinreichend genaue Bestimmung der Periodenlängen möglich ist. Das ist auch ohne diese

Rechnung einzusehen; denn aus Beobachtungen, die sich nur auf einen kleinen Teil der Periode erstrecken, kann diese nur dann mit Sicherheit ermittelt werden, wenn die beobachteten Zahlen mit großer Genauigkeit (auf sehr viele Dezimalstellen) bestimmt wurden.

Zu noch erheblicheren Abweichungen kommt es in den Werten von $a$ und $A$. So entspricht z. B. einer Differenz von 23′ in den Werten der Winkel $\alpha$ eine Differenz von 2°26′ in den Werten der Winkel $a$ und eine Differenz von 2984 Einheiten der 4. Dezimale in den Werten von $A$.

Im vorliegenden extremen Fall macht sich die Tatsache, daß man die Winkel $\alpha$, $\beta$, ... stets genauer erhält als die Werte $a$, $b$, ... und $A$, $B$, ..., besonders stark bemerkbar, weit mehr als im 1. Beispiel. Ein Grund für die größere Ungenauigkeit in den Werten von $a$, $b$, ... und $A$, $B$, ... liegt in der größeren Anzahl von Rechenoperationen, die man zur Bestimmung dieser letzteren Größen auszuführen hat.

### 3. Beispiel.

Das 3. Beispiel ist das Gegenstück zum 2. Beispiel.

Es wurde demgemäß untersucht, welche Genauigkeit in der Berechnung der Werte $\alpha$, $a$, $A$, ... erreicht wird, wenn die gegebenen Funktionswerte auf möglichst viele Perioden verteilt sind, was in den Zahlen durch das Auftreten vieler Maxima und Minima zum Ausdruck kommt.

Es zeigte sich, daß in einem solchen Falle die Verhältnisse wesentlich günstiger liegen, als im vorigen Beispiel. Im gegebenen Fall entspricht einem Unterschiede von 3 Einheiten der 4. Dezimale in den Größen $p''$ und $(p'')$ nur ein Unterschied von 27″ in den Werten von $\alpha$ (gegen 46′ im vorigen Beispiel).

Ich wählte die Funktion

$$T^{(m)} = 4 \sin(345° + 302°?m) + 5 \sin(100° + 98°?m).$$

Die Rechnung zeigt, daß durch die Anwendung der Lagrangeschen Methode in den Winkeln eine Genauigkeit von etwa $\pm 6''$ und in den Amplituden eine solche von $\pm 2$ Einheiten der 4. Dezimale erreicht wird, wenn die gegebenen Funktionswerte, die aus folgender Tabelle ersichtlich sind, auf 4 Dezimalen angegeben werden. Das betrachtete Intervall erstreckt sich von $m = -5$ bis $m = +5$.

| $m$ | $4\sin(345^\circ + 302^\circ m)$ | $5\sin(100^\circ + 98^\circ m)$ | $T^{(m)}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $-5$ | $-3{,}9848$ | $-2{,}5000$ | $-6{,}4848$ | $^{V}T$ |
| $-4$ | $-2{,}4073$ | $+4{,}6359$ | $+2{,}2286$ | $^{IV}T$ |
| $-3$ | $+1{,}4335$ | $+1{,}2096$ | $+2{,}6431$ | $'''T$ |
| $-2$ | $+3{,}9265$ | $-4{,}9726$ | $-1{,}0461$ | $''T$ |
| $-1$ | $+2{,}7280$ | $+0{,}1745$ | $+2{,}9025$ | $'T$ |
| 0 | $-1{,}0353$ | $+4{,}9241$ | $+3{,}8888$ | $T$ |
| $+1$ | $-3{,}8252$ | $-1{,}5451$ | $-5{,}3703$ | $T'$ |
| $+2$ | $-3{,}0188$ | $-4{,}4940$ | $-7{,}5128$ | $T''$ |
| $+3$ | $+0{,}6257$ | $+2{,}7960$ | $+3{,}4217$ | $T'''$ |
| $+4$ | $+3{,}6820$ | $+3{,}7157$ | $+7{,}3977$ | $T^{IV}$ |
| $+5$ | $+3{,}2766$ | $-3{,}8302$ | $-0{,}5536$ | $T^{V}$ |

Nach der 2. Methode fand ich hier

$$\alpha = 58^\circ 0' 6'' \,(\mathbf{301^\circ 59' 54''})$$
$$\beta = \mathbf{97^\circ 59' 55''}\,(262^\circ 0' 5'')$$
$$a = \pm 15^\circ 2'' = \pm a_1\,(\mathbf{344^\circ 59' 58''}).$$

Der positiven Wurzel in (83) entspricht wegen (77) im vorliegenden Falle $[F_1 = -1{,}0353;\ (F_1) = -6{,}5530]$ ein negativer Winkel $(-a_1)$ bzw. ein positiver $(360^\circ - a_1)$, wenn für $\alpha$ der negative spitze Winkel gewählt wird. [Man vergleiche auch (st).]

$$A = 3{,}9998$$
$$b = \mathbf{100^\circ 6''}\,(79^\circ 59' 54'')\ [G_1 = +4{,}9240;\ (G_1) = +1{,}7198]$$
$$B = 5{,}0001.$$

Damit seien diese einführenden Untersuchungen beendet.

Ich trete nun in den 3. Teil ein, der die Aufgabe behandelt, welche Resultate die Anwendung der Lagrangeschen Methode mit einem vorliegenden Zahlenmaterial liefert, von dem vermutet wird, daß sich die einzelnen aufeinanderfolgenden Zahlen aus einer Formel (1) berechnen lassen, wenn man hierin die Zahlen der natürlichen Zahlenfolge $(\cdots -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ +3,\ \cdots)$ setzt.

## III. Teil.

Im folgenden ist das Sonnenfleckenproblem nach den im I. Teil gegebenen Methoden untersucht worden. Über die darzustellende Funktion ist keinerlei Voraussetzung gemacht, vielmehr ergibt sich ihr ganzer Aufbau durch die Rechnung allein. (Im Gegensatz hierzu vergleiche man die Schlußbemerkung.) Das Zahlenmaterial ist den „Astronomischen Mitteilungen gegründet von Dr. Rudolf Wolf, Nr. XCIII, herausgegeben von A. Wolfer“ (Siehe auch Literaturangabe) entnommen. Den mittleren Verlauf des Fleckenphänomens ohne Rücksicht auf seine kurzperiodischen sekundären Schwankungen geben dort die ausgeglichenen Relativzahlen der Tab. II von Seite 90 bis 93. Dieselben sind aus den beobachteten Relativzahlen der Tab. I. auf Seite 85 bis 88 dadurch gewonnen, daß je 12 aufeinanderfolgende Monatsmittel der beobachteten Relativzahlen zu einem Mittel zusammengefaßt sind und aus je 2 aufeinanderfolgenden dieser Gesamtmittel abermals das Mittel gezogen wurde, welches dann für die Mitte der 13 so vereinigten Monate gilt (Seite 89).

Im folgenden wurden von den so erhaltenen ausgeglichenen Relativzahlen die Jahresmittel zur Rechnung benützt.

Die Sonnenfleckenbeobachtungen beginnen im Jahre 1749. Indessen wurden zur Rechnung nur die Zahlen etwa seit 1800 wegen ihrer größeren Zuverlässigkeit verwendet. Ausgangen wurde vom Jahre 1860, dessen mittlere Relativzahl $T = 94{,}8$ ist. Geht man von hier von 3 zu 3 Jahren vorwärts und zurück, so ergeben sich die zur Bildung der Reihen (18), (19), (20) und (21) notwendigen Koeffizienten. (Man vergleiche die Resultate des 3. Beispiels!)

| $T$ | $T'$ | $T''$ | $T'''$ | $T^{IV}$ | $T^{V}$ | $T^{VI}$ | $T^{VII}$ | $T^{VIII}$ | $T^{IX}$ | $T^{X}$ | $T^{XI}$ | $T^{XII}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 94,8 | 45,4 | 14,7 | 78,6 | 99,7 | 18,9 | 3,9 | 54,4 | 63,3 | 12,6 | 8,4 | 83,7 | 43,1 |
| | 23,0 | 21,0 | 63,2 | 125,0 | 38,4 | 23,0 | 83,4 | 121,1 | 9,4 | 67,2 | 51,6 | 8,3 |
| | $^{I}T$ | $^{II}T$ | $^{III}T$ | $^{IV}T$ | $^{V}T$ | $^{VI}T$ | $^{VII}T$ | $^{VIII}T$ | $^{IX}T$ | $^{X}T$ | $^{XI}T$ | $^{XII}T$ |

### 1. Methode.

Die Reihe (18) heißt dann

$$S_1 = 117{,}8 + 66{,}4x + 77{,}9x^2 + 203{,}6x^3 + 138{,}1x^4 + 41{,}9x^5 + \\ + 87{,}3x^6 + 175{,}5x^7 + 72{,}7x^8 + 79{,}8x^9 + 60{,}0x^{10} + 92{,}0x^{11} + \\ + 49{,}7x^{12} + 43{,}8x^{13} + 40{,}8x^{14} + 63{,}2x^{15} + 54{,}3x^{16} + \ldots [5]$$

## Kettendivision zur 1. Methode mit Reihe (18), dreistellig.

| | | |
|---|---|---|
| | | $q$ [4,3] |
| 1. Quotient | | $1+x^2-\widetilde{1{,}564}x$ |
| 1. Divisor: $S$ | | $1+0{,}564x+0{,}662x^2+1{,}729+1{,}173+0{,}356+0{,}741+1{,}491+0{,}618+0{,}678+0{,}509+0{,}782+0{,}422+0{,}372+0{,}347+0{,}537+0{,}461+\cdots$ [4,3] |
| 1. Dividend | | $1-1{,}000x$ |
| | | [4,3] [8,5] |
| $-(1+x^2\cdot S$ | | $-1-0{,}564x-1{,}662x^2-2{,}293-1{,}835-2{,}085-1{,}914-1{,}847-1{,}359-2{,}169-1{,}127-1{,}460-0{,}931-1{,}154-0{,}769-0{,}909-0{,}808+\cdots$ |
| add. | | $*-1{,}564x-$ |
| | | [9,1] [14,1] |
| $-q\cdot x\cdot S$ | | $+1{,}564x+0{,}883x^2+1{,}036+2{,}704+1{,}835+0{,}557+1{,}160+2{,}333+0{,}967+1{,}060+0{,}796+1{,}223+0{,}661+0{,}582+0{,}543+0{,}840+\cdots$ |
| add.: $p'\cdot x^2\cdot S'$ | * | $\widetilde{-0{,}779}x^2-1{,}257+0{,}869-0{,}250-1{,}357-0{,}687-0{,}974-1{,}202-0{,}067-0{,}664+0{,}292-0{,}493-0{,}187-0{,}366+0{,}032+\cdots$ |
| | | $p'$ [13,4] [22,6] |

Der durch $p'x^2$ dividierte Rest heißt: $S' = 1 + 1{,}613x - 1{,}116x^2 + 0{,}321x^3 + \cdots$

| | | |
|---|---|---|
| | | $q'$ 33,8 |
| 2. Quotient | | $1+x^2-\widetilde{1{,}049}x$ |
| 2. Divisor: $S'$ | | $1+1{,}613x-1{,}116x^2+0{,}321+1{,}741+0{,}882-1{,}251+1{,}545+0{,}086+0{,}852-0{,}375+0{,}633+0{,}240+0{,}470-0{,}041+\cdots$ [29,5] |
| 2. Dividend: $S$ | | $1+0{,}564x+0{,}662x^2+1{,}729+1{,}173+0{,}356+0{,}741+1{,}491+0{,}618+0{,}678+0{,}509+0{,}782+0{,}422+0{,}372+0{,}347+\cdots$ [4,3] |
| | | [29,5] |
| $-(1+x^2)\cdot S'$ | | $-1-1{,}613x+0{,}116x^2-1{,}934-0{,}625-1{,}203-0{,}490-2{,}427+1{,}165-2{,}397+0{,}289-1{,}485+0{,}135-1{,}103-0{,}199+\cdots$ [59,0] |
| | | [33,8] |
| add. | | $*-1{,}049x+0{,}778x^2-0{,}205+0{,}548-0{,}847+0{,}251-0{,}936+1{,}783-1{,}719+0{,}798-0{,}703+0{,}557-0{,}731+0{,}148+\cdots$ [63,3] |
| | | [86,4] |
| $-q'\cdot x\cdot S'$ | | $+1{,}049x+1{,}691x^2-1{,}169+0{,}337+1{,}828+0{,}925-1{,}312+1{,}620+0{,}090+0{,}894-0{,}393+0{,}664+0{,}252+0{,}493+\cdots$ [90,7] |
| add.: $p''\cdot x^2\cdot S''$ | * | $\widetilde{+2{,}469}x^2-1{,}374+0{,}885+0{,}981+1{,}176-2{,}248+3{,}403-1{,}629+1{,}692-1{,}096+1{,}221-0{,}479+0{,}641+\cdots$ [154,0] |
| | | $p''$ [120,2] |

Der durch $p''x^2$ dividierte neue Rest heißt: $S'' = 1 - 0{,}557x + 0{,}359x^2 + 0{,}397x^3 + 0{,}476x^4 - \cdots$

| | | |
|---|---|---|
| | $q''$ 95,1 | |
| 3. Quotient | $1+x^2+2{,}170x$ | |
| 3. Divisor: $S''$ | $1-0{,}557x+0{,}359x^2+0{,}397+0{,}476-0{,}911+1{,}379-0{,}659+0{,}686-0{,}444+0{,}495-0{,}194+0{,}260+\cdots$ | [65,6] |
| 3. Dividend: $S'$ | $1+1{,}613x-1{,}116x^2+0{,}321+1{,}741+0{,}882-1{,}251+1{,}545+0{,}086+0{,}852-0{,}375+0{,}633+0{,}240+\cdots$ | [29,5] |
| | [65,6] | |
| $-(1+x^2)\cdot S''$ | $-1+0{,}557x-1{,}359x^2+0{,}160-0{,}835+0{,}514-1{,}855+1{,}570-2{,}065+1{,}103-1{,}181+0{,}638-0{,}755+\cdots$ | [131,2] |
| | [95,1] | |
| add. | $*+2{,}170x-2{,}475x^2+0{,}481+0{,}906+1{,}396-3{,}106+3{,}115-1{,}979+1{,}955-1{,}556+1{,}271-0{,}515+\cdots$ | [160,7] |
| | [201,5] | |
| $-q''\cdot x\cdot S''$ | $-2{,}170x+1{,}210x^2-0{,}779-0{,}861-1{,}032+1{,}977-2{,}992+1{,}430-1{,}489+0{,}964-1{,}074+0{,}421+\cdots$ | 279,5] |
| add.: $p'''\cdot x^2\cdot S'''$ | $*\quad \underbrace{-1{,}265}_{p'''}x^2-0{,}298+0{,}045+0{,}364-1{,}129+0{,}123-0{,}549+0{,}466-0{,}592+0{,}197-0{,}094+\cdots$ | [440,2] |
| | [296,6] | |

$$S''' = 1 + 0{,}236x - 0{,}036x^2 - 0{,}288x^3 + 0{,}893x^4 - \cdots$$

| | | |
|---|---|---|
| | $q'''$ [521] | |
| 4. Quotient | $1+x^2-0{,}793x$ | |
| 4. Divisor: $S'''$ | $1+0{,}236x-0{,}036x^2-0{,}288+0{,}893-0{,}097+0{,}434-0{,}368+0{,}468-0{,}156+0{,}074+\cdots$ | [455] |
| 4. Dividend: $S''$ | $1-0{,}557x+0{,}359x^2+0{,}397+0{,}476-0{,}911+1{,}379-0{,}659+0{,}686-0{,}444+0{,}495+\cdots$ | [66 |
| | [455] | |
| $-(1+x^2)\cdot S'''$ | $-1-0{,}236x-0{,}964x^2+0{,}052-0{,}857+0{,}385-1{,}327+0{,}465-0{,}902+0{,}524-0{,}542+\cdots$ | [910] |
| | [521] | |
| add. | $*-0{,}793x-0{,}605x^2+0{,}449-0{,}381-0{,}526+0{,}052-0{,}194-0{,}216+0{,}080-0{,}047+\cdots$ | [976] |
| | [721] | |
| $-q'''\cdot x\cdot S'''$ | $+0{,}793x+0{,}187x^2-0{,}029-0{,}228+0{,}708-0{,}077+0{,}344-0{,}292+0{,}371-0{,}124+\cdots$ | [1063] |
| add.: $p''''\cdot x^2\cdot S''''$ | $*\quad \underbrace{-0{,}418}_{p''''}x^2+0{,}420-0{,}609+0{,}182-0{,}025+0{,}150-0{,}508+0{,}451-0{,}171+\cdots$ | [2039] |
| | [1242] | |

Um zu entscheiden wann die nunmehr vorzunehmende Kettendivision abzubrechen ist, wurde angenommen, die gegebenen Zahlen seien auf 5 Einheiten der 1. Dezimale richtig. Hier ist eine gewisse willkürliche Annahme notwendig. Wenn man sich überlegt, mit welchen Fehlerquellen man bei der Beobachtung der Flecken zu rechnen hat, dann wie aus den beobachteten Zahlen die ausgeglichenen entstehen, so wird man wohl schwerlich den ausgeglichenen Relativzahlen eine größere Genauigkeit zusprechen wollen.

Mit $S_1$ verfährt man jetzt, wie unter (h) angegeben ist. $p = 117{,}8$ [5] und

$$S = 1 + 0{,}564x + 0{,}662x^2 + 1{,}729x^3 + 1{,}173x^4 + 0{,}356x^5 + \\ + 0{,}741x^6 + 1{,}491x^7 + 0{,}618x^8 + 0{,}678x^9 + 0{,}509x^{10} + \\ + 0{,}782x^{11} + 0{,}422x^{12} + 0{,}372x^{13} + 0{,}347x^{14} + 0{,}537x^{15} + \\ + 0{,}461x^{16} + \ldots \quad [4{,}3]$$

Die in Klammern stehenden Zahlen geben die möglichen Fehler in Einheiten der letzten Dezimale.

Da jetzt die möglichen Fehler größer werden als „sämtliche" Koeffizienten der Reihe des letzten Restes, so breche ich jetzt die Kettendivision ab.

Alle Koeffizienten der letzten Restreihe sind ungefähr von derselben Größenordnung. Diese Tatsache garantiert bis zu einem gewissen Grade, daß, falls es gelingt, eine Formel von der Form (1) aufzustellen, dieselbe wenigstens in dem ganzen Intervalle 1809 – 1908 Geltung haben wird.

Um zu sehen, welchen Einfluß die Rechnung selbst auf die Größen $p'$, $p''$, $p'''$, $q$, $q'$, $q''$, $q'''$ und auf die Koeffizienten des Restes $p''''x^2S''''$ ausübt, (man hat zu unterscheiden zwischen Fehlern, die ihren Ursprung in der Beobachtung haben und solchen, die durch die Rechenoperationen entstehen; erstere sind unvermeidlich, letztere können durch ein Rechnen mit mehr Dezimalstellen beliebig klein gemacht werden) habe ich diesselbe Rechnung vierstellig, aber nur mit den zu vier Kettendivisionen erforderlichen $(4 \cdot 2 + 1)$ ersten Gliedern der Reihe (18) ausgeführt. Wie schon im 1. Beispiele, so zeigte sich auch hier, daß diese Fehler ganz unerheblich sind. Sie betragen im ungünstigsten Falle 2 Einheiten der letzten (dritten) Dezimale.

Es sei noch besonders hervorgehoben, daß es keinen Zweck hat, die Kettendivision weiter fortzusetzen. Man würde Gefahr laufen, statt einer besseren Formel eine weniger gute zu erhalten, wie das tatsächlich im 2. Beispiele vorgekommen ist.

Mit Hilfe der durch die vierstellige Rechnung gewonnenen Größen

$$\begin{aligned} p' &= -0{,}7799; & q &= -1{,}5637 \\ p'' &= +2{,}4680; & q' &= -1{,}0493 \\ p''' &= -1{,}2627; & q'' &= +2{,}1703 \\ & & q''' &= -0{,}7911, \end{aligned}$$

die von denen aus der dreistelligen Rechnung sich ergebenden nur wenig (im Max. 2 Einh. der 3. Dez.) abweichen, findet man aus (54)

$$\psi'' = (1+q''y)(1+q'''y)+p'''y^2 = 1+(q''+q''')y+(q''q'''+p''')y^2$$
$$q''q'''+p''' = -1{,}7169-1{,}2627 = -2{,}9796$$
$$\psi'' = 1+1{,}3792y-2{,}9796y^2$$

$$\psi''' = (1+q'y)\ \psi''+p''y^2\ (1+q'''y)$$
$$y \mid +1{,}3792-1{,}0493 = +0{,}3299$$
$$y^2 \mid -2{,}9796-1{,}0493\cdot+1{,}3792+2{,}4680 = -0{,}5116-1{,}4472 = -1{,}9588$$
$$y^3 \mid -1{,}0493\cdot+2{,}9796+2{,}4680\cdot-0{,}7911 = +3{,}1265-1{,}9525 = +1{,}1740$$
$$\psi''' = 1+0{,}3299y-1{,}9588y^2+1{,}1740y^3$$

$$\psi'''' = (1+qy)\cdot\psi'''+p'y^2\psi''$$
$$y \mid -1{,}5637+0{,}3299 = -1{,}2338$$
$$y^2 \mid -1{,}9588-1{,}5637\cdot+0{,}3299-0{,}7799 = -2{,}7387-0{,}5159 = -3{,}2546$$
$$y^3 \mid +1{,}1740-1{,}5637\cdot-1{,}9588-0{,}7799\cdot+1{,}3792 = 1{,}1740+3{,}0630-1{,}0756 = +3{,}1614$$
$$y^4 \mid -1{,}5637\cdot+1{,}1740-0{,}7799\cdot-2{,}9796 = -1{,}8358+2{,}3238 = +0{,}4880$$
$$\psi'''' = 1-1{,}2338y-3{,}2546y^2+3{,}1614y^3+0{,}4880y^4$$

Nach (i) bestimmen sich jetzt die Größen $\omega$, $\varrho$, $\mu$, $\nu$ als Wurzeln der Gleichung (56)

$$z^4-1{,}2338z^3-3{,}2546z^2+3{,}1614z+0{,}4880 = 0.$$

Löst man diese Gleichung nach $z$ auf, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \omega = -0{,}1363 \\ z_2 &= \varrho = +2{,}0105 \\ z_3 &= \mu = +1{,}0520 \\ z_4 &= \nu = -1{,}6924 \end{aligned}\right\}$$ und damit aus (59)

$$\cos\alpha = \frac{\omega}{2} = -0{,}06815$$
$$\cos\beta = \frac{\varrho}{2} = +1{,}00525$$
$$\cos\gamma = \frac{\mu}{2} = +0{,}5260$$
$$\cos\delta = \frac{\nu}{2} = -0{,}8462$$

Eine weitere Verfolgung der möglichen Fehler ist nicht nur sehr umständlich, sondern auch wenig zweckdienlich; denn da sich jetzt die Rechenoperationen beträchtlich häufen, werden die ausgerechneten Maximalfehler in Wirklichkeit doch nie annähernd erreicht werden. Ich habe übrigens später bei einer andern Kettendivision die möglichen Fehler bis zur Gleichung 4. Grades verfolgt und gefunden, daß dieselben schließlich den doppelten und mehrfachen Betrag der Koeffizienten übersteigen. Auf diese Weise ist es somit aussichtslos, etwas über die Genauigkeit der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zu erfahren.

Von der größten Wichtigkeit für die gestellte Aufgabe ist die Tatsache, daß die 4 Wurzeln der Gleichung 4. Grades in $x$ nicht nur alle reell, sondern auch alle nahezu zwischen $-2$ und $+2$ liegen. Damit ergeben sich die 4 Winkel reell. Es wird

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 93^\circ\,54' \\ \beta = 0^\circ \text{ (nahezu!)} \\ \gamma = 58^\circ\,16' \\ \delta = 147^\circ\,48'\end{array}\right\} \text{ und hieraus die Perioden in Jahren } \begin{array}{l} P_\alpha = \dfrac{360^\circ}{93^\circ\,54'} \cdot 3 = 11{,}50 \\ P_\beta = \infty \text{ [siehe auch (st)]} \\ P_\gamma = \dfrac{360^\circ}{58^\circ\,16'} \cdot 3 = 18{,}54 \\ P_\delta = \dfrac{360^\circ}{147^\circ\,48'} \cdot 3 = 7{,}31 \end{array}$$

Die hier gefundenen Perioden sind nicht so genau, wie die aus
(y) der am besten aufgehenden 3. Kettendivision mit Reihe (20) gewonnenen. Ich habe diese genaueren Perioden später besonders hervorgehoben.

$\beta = 0$ drückt aus, daß die aufzustellende Formel (1) ein konstantes Glied besitzen muß. Dasselbe liefert die Methode in der Form „B sin b“. Seine Bestimmung durch die Methode ist einer bloßen Mittelbildung aus den benützten Relativzahlen vorzuziehen.

Um die Phasenwinkel $a$, $b$, $c$, $d$ und die Amplituden $A$, $B$, $C$, $D$ berechnen zu können, benötigt man noch die Ergebnisse der Kettendivision mit Reihe (19). Gleichzeitig ergeben sich dadurch die Perioden zum 2. Male. Wie in den vorangegangenen Beispielen gezeigt wurde, sind immer jene Perioden ihren wahren Werten am nächsten, welche aus den Ergebnissen der am besten aufgehenden Kettendivision gewonnen wurden.

Die Reihe in (19) heißt (Tabelle!)

$$S_2 = 71{,}8 + 24{,}4x - 48{,}5x^2 - 46{,}4x^3 + \\ + 61{,}3x^4 - 4{,}1x^5 - 79{,}5x^6 - 66{,}7x^7 + 53{,}9x^8 - 54{,}6x^9 - \ldots$$

Man verfährt mit ihr wie unter (m) angegeben ist. Es wird

$(p) = 71{,}8$ und

$$(S) = 1 + 0{,}340x - 0{,}675x^2 - 0{,}646x^3 + 0{,}854x^4 - 0{,}057x^5 - \\ - 1{,}107x^6 - 0{,}929x^7 + 0{,}751x^8 - 0{,}760x^9 - \cdots$$

Kettendivision zur 1. Methode mit Reihe (19), dreistellig.

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q)}$ |
| 1. Quotient | $1+x^2+\overbrace{0{,}660}x$ |
| 1. Divisor: $(S)$ | $1+0{,}340x-0{,}675x^2-0{,}646+0{,}854-0{,}057-1{,}107-0{,}929+0{,}751-0{,}760$ |
| 1. Dividend | $1+1{,}000x$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S)$ | $-1-0{,}340x-0{,}325x^2+0{,}306-0{,}178+0{,}703+0{,}254+0{,}986+0{,}357+1{,}689$ |
| add. | $*+0{,}660x-$ |
| $-(q)\cdot x\cdot(S)$ | $-0{,}660x-0{,}224x^2+0{,}446+0{,}427-0{,}564+0{,}038+0{,}731+0{,}613-0{,}496$ |
| add.: $(p')\cdot x^2\cdot(S')$ | $*\quad\underbrace{-0{,}549x^2}_{(p')}+0{,}752+0{,}249+0{,}139+0{,}292+1{,}717+0{,}970+1{,}193$ |

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q')}$ |
| 2. Quotient | $1+x^2+\overbrace{1{,}711}x$ |
| 2. Divisor: $(S')$ | $1-1{,}371x-0{,}453x^2-0{,}255-0{,}531-3{,}128-1{,}767-2{,}175$ |
| 2. Dividend: $(S)$ | $1+0{,}340x-0{,}675x^2-0{,}646+0{,}854-0{,}057-1{,}107-0{,}929$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S')$ | $-1+1{,}371x-0{,}547x^2+1{,}625+0{,}983+3{,}383+2{,}298+5{,}303$ |
| add. | $*+1{,}711x-1{,}222x^2+0{,}979+1{,}837+3{,}326+1{,}191+4{,}374$ |
| $-(q')\cdot x\cdot(S')$ | $-1{,}711x+2{,}345x^2+0{,}774+0{,}435+0{,}908+5{,}351+3{,}023$ |
| add.: $(p'')\cdot x^2\cdot(S'')$ | $*\quad\underbrace{+1{,}123x^2}_{(p'')}+1{,}753+2{,}272+4{,}234+6{,}542+7{,}397$ |

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q'')}$ |
| 3. Quotient | $1+x^2-\overbrace{2{,}934}x$ |
| 3. Divisor: $(S'')$ | $1+1{,}563x+2{,}026x^2+3{,}774+5{,}832+6{,}594$ |
| 3. Dividend: $(S')$ | $1-1{,}371x-0{,}452x^2-0{,}255-0{,}531-3{,}128$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S'')$ | $-1-1{,}563x-3{,}026x^2-5{,}337-7{,}858-10{,}368$ |
| add. | $*-2{,}934x-3{,}478x^2-5{,}592-8{,}389-13{,}496$ |
| $-(q'')\cdot x\cdot(S'')$ | $+2{,}934x+4{,}585x^2+5{,}942+11{,}071+17{,}108$ |
| add.: $(p''')\cdot x^2\cdot(S''')$ | $*\quad\underbrace{+1{,}107x^2}_{(p''')}+0{,}350+2{,}682+3{,}612$ |

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{(q''')}$ |
| 4. Quotient | $1+x^2+\overbrace{1{,}246}x$ |
| 4. Divisor: $(S''')$ | $1+0{,}317x+2{,}425x^2+3{,}263x^3$ |
| 4. Dividend: $(S'')$ | $1+1{,}563x+2{,}026x^2+3{,}774x^3$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S''')$ | $-1-0{,}317x-3{,}425x^2-3{,}580x^3$ |
| add. | $*+1{,}246x-1{,}399x^2+0{,}194x^3$ |
| $-(q''')\cdot x\cdot(S''')$ | $-1{,}246x-0{,}395x^2-3{,}021x^3$ |
| add.: $(p'''')\cdot x^2\cdot(S'''')$ | $*\quad\underbrace{-1{,}794x^2}_{(p'''')}-2{,}827x^3$ |

Die Restglieder sind ziemlich groß; insbesondere ist $|(p'''')| > |p''''|$. Hieraus kann nach den vorigen Beispielen geschlossen werden, daß die aus den Ergebnissen dieser Kettendivision gewonnenen Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ weniger gut den wahren Werten nahekommen, als die vorigen.

Man findet mit

$$\begin{array}{ll} & (q) = +0{,}660 \\ (p') = -0{,}549 & (q') = +1{,}711 \\ (p'') = +1{,}122 & (q'') = -2{,}934 \\ (p''') = +1{,}106 & (q''') = +1{,}246 \end{array}$$

aus (54)

$$(\psi'') = 1 + [(q'') + (q''')]\, y + [(q'') \cdot (q''') + (p''')]\, y^2$$
$$(q'') \cdot (q''') + (p''') = -3{,}655 + 1{,}106 = -2{,}549$$
$$(\psi''') = 1 - 1{,}688\, y - 2{,}549\, y^2$$

$$(\psi''') = [1 + (q')\, y] \cdot (\psi'') + (p') \cdot y^2 \cdot [1 + (q''') \cdot y]$$
$$y \;|\; +1{,}711 - 1{,}688 = +0{,}023$$
$$y^2 \;|\; -2{,}549 - 1{,}688 \cdot + 1{,}711 + 1{,}122 = -1{,}427 - 2{,}888 = -4{,}315$$
$$y^3 \;|\; +1{,}711 \cdot -2{,}549 + 1{,}122 \cdot + 1{,}246 = -4{,}361 + 1{,}398 = -2{,}963$$
$$(\psi''') = 1 + 0{,}023\, y - 4{,}315\, y^2 - 2{,}963\, y^3$$

$$(\psi'''') = [1 + (q)\, y] \cdot (\psi''') + (p') \cdot y^2\, (\psi'')$$
$$y \;|\; +0{,}660 + 0{,}023 = +0{,}683$$
$$y^2 \;|\; -4{,}315 + 0{,}660 \cdot + 0{,}023 - 0{,}549 = -4{,}864 + 0{,}015 = -4{,}849$$
$$y^3 \;|\; -2{,}963 + 0{,}660 \cdot -4{,}315 - 0{,}549 \cdot -1{,}688 = -2{,}963 - 2{,}845 + 0{,}929 = -4{,}882$$
$$y^4 \;|\; +0{,}660 \cdot -2{,}963 - 0{,}549 \cdot -2{,}549 = -1{,}955 + 1{,}399 = -0{,}556$$
$$(\psi'''') = 1 + 0{,}683\, y - 4{,}849\, y^2 - 4{,}882\, y^3 - 0{,}556\, y^4$$

Die Größen $(\omega)$, $(\varrho)$, $(\mu)$, $(\nu)$, sind dann die Wurzeln der Gleichung

$$(x)^4 + 0{,}683\,(x)^3 - 4{,}849\,(x)^2 - 4{,}882\,(x) - 0{,}556 = 0.$$

Es wird

$$\left.\begin{array}{l} (x_1) = (\omega) = -0{,}131 \\ (x_2) = (\varrho) = +2{,}334 \\ (x_3) = (\mu) = -0{,}927 \\ (x_4) = (\nu) = -1{,}959 \end{array}\right\} \quad \text{und damit} \quad \begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{(\omega)}{2} = -0{,}0655 \\ \cos\beta = \dfrac{(\varrho)}{2} = +1{,}167 \\ \cos\gamma = \dfrac{(\mu)}{2} = -0{,}4635 \\ \cos\delta = \dfrac{(\nu)}{2} = -0{,}9795 \end{array}$$

Die Wurzeln der Gleichung in $(z)$ sind zwar auch hier alle reell, liegen auch annähernd alle zwischen $-2$ und $+2$; sonst weichen sie aber zum Teil recht erheblich von den Wurzeln der Gleichung in $z$ ab. Am bedeutendsten ist der Unterschied von $(z_3)$ und $z_3$. Am besten stimmt $(z_1)$ mit $z_1$ überein. Man erhält

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 93^\circ 45' \\ \gamma = 117^\circ 37' \\ \delta = 168^\circ 13'\end{array}\right\} \text{ und hieraus die Perioden in Jahren } \begin{array}{l} P_\alpha = \dfrac{360^\circ}{93^\circ 45'} \cdot 3 = 11{,}52 \\ P_\gamma = \dfrac{360^\circ}{117^\circ 37'} \cdot 3 = 9{,}18 \\ P_\delta = \dfrac{360^\circ}{168^\circ 13'} \cdot 3 = 6{,}42 \end{array}$$

[vgl. (y)].

Um zu beweisen, daß für das vorliegende Problem eine Rechnung mit 3 Dezimalen vollständig genügt, habe ich die Berechnung der Perioden aus Reihe (18) noch einmal, nur dreistellig vorgenommen. Der Unterschied in den Zahlenwerten der vierstelligen und dreistelligen Rechnung ergibt sich so gering, daß er kaum in Betracht kommt.

Die Gleichung 4. Grades in $z$ lautet mit drei Dezimalen

$$z^4 - 1{,}236z^3 - 3{,}252z^2 + 3{,}166z + 0{,}490 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung

$$z_1 = -0{,}137\,;\ \cos\alpha = \frac{z_1}{2} = -0{,}0685\,;\ \alpha = 93^\circ 55'\,;\ P_\alpha = 11{,}50^a$$

$$z_2 = +2{,}010\,;\ \cos\beta = \frac{z_2}{2} = +1{,}005\ ;\ \beta \sim 0^\circ\ ;$$

$$z_3 = +1{,}054\,;\ \cos\gamma = \frac{z_3}{2} = +0{,}527\ ;\ \gamma = 58^\circ 12'\,;\ P_\gamma = 18{,}56^a$$

$$z_4 = -1{,}692\,;\ \cos\delta = \frac{z_4}{2} = -0{,}846\ ;\ \delta = 147^\circ 47'\,;\ P_\delta = 7{,}32^a$$

vgl. (y)!

Bevor ich jetzt zur Berechnung der Phasenwinkel $a$, $b$, $c$, $d$ und der Amplituden $A$, $B$, $C$, $D$ übergehe, nehme ich zuerst die beiden zur 2. Methode gehörigen Kettendivisionen mit Reihe $S_3$ in (20) und $S_4$ in (21) vor; denn es ist möglich, daß eine dieser Kettendivisionen noch besser aufgeht als die mit Reihe $S_1$, wodurch dann die Perioden genauer bestimmt werden könnten. Von der genauen Kenntnis der Perioden hängt ja die Brauchbarkeit einer Formel (1) in hohem

Grade ab. In zweiter Linie könnte man dann auch $a$, $b$, $c$, $d$ und $A$, $B$, $C$, $D$ genauer bestimmen, deren Berechnung, wie (67), (68), (69) und (70) zeigt, an die Kenntnis der Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ oder der Perioden geknüpft ist.

---

### Zur 2. Methode.

Die Reihe $S_3$ in (20) heißt hier

$$S_3 = 94{,}8 + 68{,}4x + 35{,}7x^2 + 141{,}8x^3 + 224{,}7x^4 + 57{,}3x^5 + \\ + 26{,}9x^6 + 137{,}8x^7 + 184{,}4x^8 + 22{,}0x^9 + 75{,}6x^{10} + \\ + 135{,}3x^{11} + 51{,}4x^{12} + 20{,}4x^{13} + 35{,}7x^{14} + 93{,}8x^{15} + \\ + 55{,}7x^{16} + \ldots$$

Weiter verfährt man nach $(q)$. Es wird

$$p_1 = 94{,}8$$

und

$$\underline{S} = 1 + 0{,}722x + 0{,}377x^2 + 1{,}496x^3 + 2{,}370x^4 + \cdots$$

Die Kettendivision geht besser auf, als jede bisher vorgenommene; insbesondere ist $|p_1''''| < |p''''|$. Die aus den Ergebnissen dieser Division gerechneten Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ und damit die Perioden stimmen also besser mit den wahren Werten überein, als es die aus der 1. Kettendivision erhaltenen Winkel und Perioden tun.

Man findet mit

$$\begin{aligned} p_1' &= -1{,}856; & q_1 &= -0{,}722 \\ p_1'' &= -1{,}180; & q_1' &= -0{,}326 \\ p_1''' &= +0{,}865; & q_1'' &= +1{,}498 \\ & & q_1''' &= -1{,}510 \end{aligned}$$

aus (54)

$$\psi_1'' = 1 + (q_1'' + q_1''')\, y + (q_1'' q_1''' + p_1''')\, y^2$$
$$q_1'' q_1''' + p_1''' = -2{,}262 + 0{,}865 = -1{,}397$$
$$\psi_1'' = 1 - 0{,}012\, y - 1{,}397\, y^2$$
$$\psi_1''' = (1 + q_1' y) \cdot \psi_1'' + p_1'' y^2 (1 + q_1''' y)$$
$$y \mid -0{,}326 - 0{,}012 = -0{,}338$$
$$y^2 \mid -1{,}397 - 0{,}012 - 0{,}326 - 1{,}180 = -2{,}577 + 0{,}004 = -2{,}573$$
$$y^3 \mid -0{,}326 \cdot -1{,}397 - 1{,}180 \cdot -1{,}510 = +1{,}782 + 0{,}455 = +2{,}237$$
$$\psi_1''' = 1 - 0{,}338\, y - 2{,}573\, y^2 + 2{,}237\, y^3$$

$\psi_1''' = (1 + q_1 y) \cdot \psi_1''' + p_1' y^2 \cdot \psi_1''$
$y \mid -0{,}338 - 0{,}722 = -1{,}060$
$y^2 \mid -2{,}573 - 0{,}338 \cdot -0{,}722 - 1{,}856 = -4{,}429 + 0{,}244 = -4{,}185$
$y^3 \mid +2{,}237 - 0{,}722 \cdot -2{,}573 - 1{,}856 \cdot -0{,}012 = +2{,}237 + 1{,}858 + +0{,}022 = +4{,}117$
$y^4 \mid -0{,}722 \cdot +2{,}237 - 1{,}856 \cdot -1{,}397 = -1{,}615 + 2{,}592 = +0{,}977$
$\psi_1''' = 1 - 1{,}060\, y - 4{,}185\, y^2 + 4{,}117\, y^3 + 0{,}977\, y^4$

Hieraus bildet man die Gleichung

$$\underline{z}^4 - 1{,}060\underline{z}^3 - 4{,}185\underline{z}^2 + 4{,}117\underline{z} + 0{,}977 = 0.$$

Deren Wurzeln sind

$$\left.\begin{aligned} \underline{z}_1 &= \omega_1 = -0{,}199_3 \\ \underline{z}_2 &= \varrho_1 = +2{,}001 \\ \underline{z}_3 &= \mu_1 = +1{,}238 \\ \underline{z}_4 &= \nu_1 = -1{,}980 \end{aligned}\right\} \text{ und damit } \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\omega_1}{2} = -0{,}0997 \\ \cos\beta &= \frac{\varrho_1}{2} = +1{,}0004 \\ \cos\gamma &= \frac{\mu_1}{2} = +0{,}619 \\ \cos\delta &= \frac{\nu_1}{2} = -0{,}990 \end{aligned}$$

Von den Wurzeln der Gleichung in $\underline{z}$ ist vor allem zu sagen, daß sie verhältnismäßig recht gut mit denen der Gleichung in $z$ zusammenfallen. Man erhält die Winkel

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 95^\circ 43' \\ \beta &= 0^\circ\,(360^\circ) \\ \gamma &= 51^\circ 45' \\ \delta &= 171^\circ 47' \end{aligned}\right\} \text{ und hieraus die Perioden in Jahren } \begin{aligned} \mathbf{P}_\alpha &= \frac{360^\circ}{95^\circ 36'} \cdot 3 = \mathbf{11{,}28} \\ \mathbf{P}_\beta &= \frac{360^\circ}{0^\circ} \cdot 3 = \infty; \text{ (3)} \\ \mathbf{P}_\gamma &= \frac{360^\circ}{51^\circ 45'} \cdot 3 = \mathbf{20{,}87} \\ \mathbf{P}_\delta &= \frac{360^\circ}{171^\circ 53'} \cdot 3 = \mathbf{6{,}29} \end{aligned}$$

Diese Perioden sind die genauesten [vgl. (y)].

Ich bilde noch die letzte Reihe $S_4$ in (21)

$$\begin{aligned} S_4 = 22{,}4 &- 6{,}3x + 15{,}4x^2 - 25{,}3x^3 - 19{,}5x^4 - 19{,}1x^5 - 29{,}0x^6 - \\ &- 57{,}8x^7 + 3{,}2x^8 - 58{,}8x^9 + 32{,}1x^{10} + 34{,}8x^{11} + 7{,}2x^{12} - \\ &- 24{,}3x^{13} + 23{,}6x^{14} + 46{,}7x^{15} + \cdots \end{aligned}$$

Kettendivision zur 2. Methode mit Reihe (20), dreistellig.

| | $q_1$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1+x^2-0{,}722x$ |
| 1. Divisor: $S$ | $1+0{,}722x-0{,}377x^2+1{,}496-2{,}370+0{,}604+0{,}284+1{,}454+1{,}945+0{,}232+0{,}797+1{,}427+0{,}542+0{,}215+0{,}377+0{,}989+0{,}587$ |
| 1. Dividend | $1 \quad -1{,}000x^2$ |
| $-(1+x^2)\cdot S$ | $-1-0{,}722x-1{,}377x^2-2{,}218+2{,}747-2{,}100-2{,}654-2{,}058-2{,}229-1{,}686-2{,}742-1{,}659-1{,}339-1{,}642-0{,}919-1{,}204-0{,}964$ |
| add. | $*-0{,}722x-2{,}377x^2-$ |
| $-q_1\cdot x\cdot S$ | $-0{,}722x+0{,}521x^2+0{,}272+1{,}079+1{,}710+0{,}436+0{,}205+1{,}049+1{,}403+0{,}167+0{,}575+1{,}030+0{,}391+0{,}155+0{,}272+0{,}642$ |
| add.: $p_1'\cdot x^2\cdot S'$ | $* \quad \underbrace{-1{,}856x^2-1{,}946-1{,}668-0{,}390-2{,}218-1{,}853-1{,}180-0{,}283-2{,}575-1{,}084-0{,}309-1{,}251-0{,}764-0{,}932-0{,}322}_{p_1'}$ |

Der durch $p_1' x^2$ dividierte Rest heißt: $S' = 1 + 1{,}048x + 0{,}899x^2 + 0{,}210x^3 + 1{,}195x^4 + \cdots$

| | $q_1'$ |
|---|---|
| 2. Quotient | $1+x^2-0{,}326x$ |
| 2. Divisor: $S'$ | $1+1{,}048x+0{,}899x^2+0{,}210+1{,}195-0{,}998+0{,}636+0{,}152+1{,}387+0{,}584+0{,}166+0{,}674+0{,}412+0{,}503+0{,}173+\cdots$ |
| 2. Dividend: $S$ | $1+0{,}722x+0{,}377x^2+1{,}496+2{,}370+0{,}604+0{,}284+1{,}454+1{,}945+0{,}232+0{,}797+1{,}427+0{,}542+0{,}215+0{,}377+\cdots$ |
| $-(1+x^2)\cdot S'$ | $-1-1{,}048x-1{,}899x^2-1{,}258-2{,}094-1{,}208-1{,}831-1{,}150-2{,}023-0{,}736-1{,}553-1{,}258-0{,}578-1{,}177-0{,}585+\cdots$ |
| add. | $*-0{,}326x-1{,}522x^2+0{,}238+0{,}276-0{,}604-1{,}547+0{,}304-0{,}078-0{,}504-0{,}756+0{,}169-0{,}036-0{,}962-0{,}208+\cdots$ |
| $-q_1'\cdot x\cdot S'$ | $+0{,}326x+0{,}342x^2+0{,}293+0{,}069-0{,}390+0{,}325+0{,}207+0{,}050+0{,}451+0{,}190+0{,}054+0{,}220+0{,}134+0{,}164+\cdots$ |
| add.: $p_1''\cdot x^2\cdot S''$ | $* \quad \underbrace{-1{,}180x^2+0{,}531+0{,}345-0{,}214-1{,}222+0{,}511-0{,}028-0{,}052-0{,}566+0{,}223+0{,}184-0{,}828-0{,}044+\cdots}_{p_1''}$ |

$S'' = 1 - 0{,}450x - 0{,}292x^2 + 0{,}181x^3 + 1{,}036x^4 - \cdots$

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{1 + x^2 + 1{,}498\,x}^{q_1''}$ |
| 3. Quotient | |
| 3. Divisor: $\underline{S''}$ | $1 - 0{,}450\,x - 0{,}292\,x^2 + 0{,}181 + 1{,}036 - 0{,}433 + 0{,}024 + 0{,}044 + 0{,}480 - 0{,}189 - 0{,}156 + 0{,}702 + 0{,}037$ |
| 3. Dividend: $\underline{S'}$ | $1 + 1{,}048\,x + 0{,}899\,x^2 + 0{,}210 + 1{,}195 + 0{,}998 + 0{,}636 + 0{,}152 + 1{,}387 + 0{,}584 + 0{,}166 + 0{,}674 + 0{,}412$ |
| $-(1 + x^2) \cdot \underline{S''}$ | $-1 + 0{,}450\,x - 0{,}708\,x^2 + 0{,}269 - 0{,}744 + 0{,}252 - 1{,}060 + 0{,}389 - 0{,}504 + 0{,}145 - 0{,}324 - 0{,}513 + 0{,}119$ |
| add. | $* + 1{,}498\,x + 0{,}191\,x^2 + 0{,}479 + 0{,}451 + 1{,}250 - 0{,}424 + 0{,}541 + 0{,}883 + 0{,}729 - 0{,}158 + 0{,}161 + 0{,}531$ |
| $-q_1'' \cdot x \cdot \underline{S''}$ | $-1{,}498\,x + 0{,}674\,x^2 + 0{,}438 - 0{,}272 - 1{,}551 + 0{,}649 - 0{,}036 - 0{,}066 - 0{,}719 + 0{,}283 + 0{,}234 - 1{,}051$ |
| add.: $p_1''' \cdot x^2 \cdot \underline{S'''}$ | $* \quad \overbrace{+ 0{,}865\,x^2}^{p_1'''} + 0{,}917 + 0{,}179 - 0{,}301 + 0{,}225 + 0{,}505 + 0{,}817 + 0{,}010 + 0{,}125 + 0{,}395 - 0{,}520$ |

$$\underline{S'''} = 1 + 1{,}060\,x + 0{,}207\,x^2 - 0{,}348\,x^3 + 0{,}260\,x^4 + \cdots$$

| | |
|---|---|
| | $\overbrace{1 + x^2 - 1{,}510\,x}^{q_1'''}$ |
| 4. Quotient | |
| 4. Divisor: $\underline{S'''}$ | $1 + 1{,}060\,x + 0{,}207\,x^2 - 0{,}348 + 0{,}260 + 0{,}584 + 0{,}945 + 0{,}012 + 0{,}145 + 0{,}457 - 0{,}601$ |
| 4. Dividend: $\underline{S''}$ | $1 - 0{,}450\,x - 0{,}292\,x^2 + 0{,}181 + 1{,}036 - 0{,}433 + 0{,}024 + 0{,}044 + 0{,}480 - 0{,}189 - 0{,}156$ |
| $-(1 + x^2) \cdot \underline{S'''}$ | $-1 - 1{,}060\,x - 1{,}207\,x^2 - 0{,}712 - 0{,}467 - 0{,}236 - 1{,}205 - 0{,}596 - 1{,}090 - 0{,}469 + 0{,}456$ |
| add. | $* - 1{,}510\,x - 1{,}499\,x^2 - 0{,}531 + 0{,}569 - 0{,}669 - 1{,}181 - 0{,}552 - 0{,}610 - 0{,}658 + 0{,}300$ |
| $-q_1''' \cdot x^2 \cdot \underline{S'''}$ | $+ 1{,}510\,x + 1{,}601\,x^2 + 0{,}312 - 0{,}525 + 0{,}393 + 0{,}882 + 1{,}426 + 0{,}018 + 0{,}219 + 0{,}690$ |
| add.: $p_1'''' \cdot x^2 \cdot \underline{S''''}$ | $* \quad \overbrace{+ 0{,}102\,x^2}^{p_1''''} - 0{,}219 + 0{,}044 - 0{,}276 - 0{,}299 + 0{,}874 - 0{,}592 - 0{,}439 + 0{,}990$ |

Kettendivision zur 2. Methode mit Reihe (21), drei- bzw. zweistellig.

| | |
|---|---|
| 1. Quotient | $\overbrace{1+x^2+0{,}281x}^{(q_1)}$ |
| 1. Divisor: $(\underline{S})$ | $1-0{,}281x+0{,}688x^2-1{,}130-0{,}872-0{,}853-1{,}295-2{,}580+0{,}143-2{,}625+1{,}433+1{,}554+0{,}322-1{,}085+1{,}053+2{,}085$ |
| 1. Dividend | $1$ |
| $-(1+x^2)\cdot\underline{S}$ | $-1+0{,}281x-1{,}688x^2+1{,}411+0{,}184+1{,}983+2{,}167+3{,}433+1{,}152+5{,}205-1{,}576+1{,}071-1{,}755-0{,}469-1{,}375-1{,}000$ |
| add. | $*+$ |
| $-(q_1)\cdot x\cdot(\underline{S})$ | $-0{,}281x+0{,}079x^2-0{,}193+0{,}317+0{,}245+0{,}239+0{,}364+0{,}725-0{,}040+0{,}738-0{,}403-0{,}437-0{,}091+0{,}305-0{,}296$ |
| add.: $(p_1')x^2\cdot\underline{S'}$ | $*\quad\overbrace{-1{,}609x^2}^{(p_1')}+1{,}218+0{,}501+2{,}228+2{,}406+3{,}797+1{,}877+5{,}165-0{,}838+0{,}668-2{,}192-0{,}560-1{,}070-1{,}296$ |

Der durch $(p_1')x^2$ dividierte Rest ist: $(S') = 1 - 0{,}758\,x - 0{,}312\,x^2 - 1{,}385\,x^3 - 1{,}495\,x^4 - \cdots$

| | |
|---|---|
| 2. Quotient | $\overbrace{1+x^2-0{,}477x}^{(q_1')}$ |
| 2. Divisor: $(S')$ | $1-0{,}758x-0{,}312x^2-1{,}385-1{,}495-2{,}360-1{,}167-3{,}210+0{,}521-0{,}416+1{,}362+0{,}348+0{,}666+0{,}806$ |
| 2. Dividend: $(S)$ | $1-0{,}281x+0{,}688x^2-1{,}130-0{,}872-0{,}853-1{,}295-2{,}580+0{,}143-2{,}625+1{,}433+1{,}554+0{,}322-1{,}085$ |
| $-(1+x^2)\cdot(S')$ | $-1+0{,}758x-0{,}688x^2+2{,}143+1{,}807+3{,}745+2{,}662+5{,}570+0{,}646+3{,}626-1{,}883+0{,}068-2{,}028-1{,}154$ |
| add. | $*+0{,}477x+0{,}000x^2+1{,}013+0{,}935+2{,}892+1{,}367+2{,}990+0{,}789+1{,}001-0{,}450+1{,}622-1{,}706-2{,}239$ |
| $-(q_1')\cdot x\cdot\underline{S'}$ | $-0{,}477x+0{,}362x^2+0{,}149+0{,}661+0{,}713+1{,}124+0{,}556+1{,}530-0{,}249+0{,}198-0{,}650-0{,}166-0{,}318$ |
| add.: $p_1''\cdot x^2\cdot(S'')$ | $*\quad\overbrace{+0{,}362x^2}^{(p_1'')}+1{,}162+1{,}596+3{,}605+2{,}491+3{,}546+2{,}319+0{,}752-0{,}252+0{,}972-1{,}872-2{,}557$ |

$(\underline{S''}) = 1 + 3{,}21\,x + 4{,}41\,x^2 + 9{,}96\,x^3 + 6{,}88\,x^4 + 9{,}80\,x^5 + \cdots$

| | |
|---|---|
| 3. Quotient | $\overbrace{1 + x^2}^{(q_1'')} - 3{,}97\,x$ |
| 3. Divisor: $(\underline{S}'')$ | $1 + 3{,}21\,x + 4{,}41\,x^2 + 9{,}96 + 6{,}88 + 9{,}80 + 6{,}40 + 2{,}08 - 0{,}70 + 2{,}69 - 5{,}17 - 7{,}06$ |
| 3. Dividend: $(\underline{S}')$ | $1 - 0{,}76\,x - 0{,}31\,x^2 - 1{,}39 - 1{,}50 - 2{,}36 - 1{,}17 - 3{,}21 + 0{,}52 - 0{,}42 + 1{,}36 + 0{,}35$ |
| $-(1 + x^2)\cdot(S'')$ | $-1 - 3{,}21\,x - 5{,}41\,x^2 - 13{,}17 - 11{,}29 - 19{,}76 - 13{,}28 - 11{,}88 - 5{,}70 - 4{,}77 + 5{,}87 + 4{,}37$ |
| add. | $* - 3{,}97\,x - 5{,}72\,x^2 - 14{,}56 - 12{,}79 - 22{,}12 - 14{,}45 - 15{,}09 - 5{,}18 - 5{,}19 + 7{,}23 + 4{,}72$ |
| $-(q_1'')\cdot x\cdot(\underline{S}'')$ | $+ 3{,}97\,x + 12{,}74\,x^2 + 17{,}50 + 39{,}54 + 27{,}31 + 38{,}91 + 25{,}41 + 8{,}26 - 2{,}76 + 10{,}68 - 20{,}53$ |
| add.: $(p_1''')\cdot x^2\cdot(\underline{S}''')$ | $* \quad \underbrace{+ 7{,}02}_{(p_1''')}\,x^2 + 2{,}94 + 26{,}75 + 5{,}19 + 24{,}46 + 10{,}32 + 3{,}08 - 7{,}95 + 17{,}91 - 15{,}81$ |

$$(S''') = 1 + 0{,}42\,x + 3{,}81\,x^2 + 0{,}74\,x^3 + 3{,}49\,x^4 + \cdots$$

| | |
|---|---|
| 4. Quotient | $\overbrace{1 + x^2}^{(q_1''')} + 2{,}79\,x$ |
| 4. Divisor: $(\underline{S}''')$ | $1 + 0{,}42\,x + 3{,}81\,x^2 + 0{,}74 + 3{,}49 + 1{,}47 + 0{,}44 - 1{,}13 + 2{,}55 - 2{,}25$ |
| 4. Dividend: $(\underline{S}'')$ | $1 + 3{,}21\,x + 4{,}41\,x^2 + 9{,}96 + 6{,}88 + 9{,}80 + 6{,}40 + 2{,}08 - 0{,}70 + 2{,}69$ |
| $-(1 + x^2)\cdot(\underline{S}''')$ | $-1 - 0{,}42\,x - 4{,}81\,x^2 - 1{,}16 - 7{,}30 - 2{,}21 - 3{,}93 - 0{,}34 - 2{,}99 + 3{,}38$ |
| add. | $* + 2{,}79\,x - 0{,}40\,x^2 + 8{,}80 - 0{,}42 + 7{,}59 + 2{,}47 + 1{,}74 - 3{,}69 + 6{,}07$ |
| $-(q_1''')\cdot x\cdot(\underline{S}''')$ | $- 2{,}79\,x - 1{,}17\,x^2 - 10{,}62 - 2{,}06 - 9{,}74 - 4{,}10 - 1{,}23 + 3{,}15 - 7{,}11$ |
| add.: $(p_1'''')\cdot x^2\cdot(\underline{S}'''')$ | $* \quad \underbrace{- 1{,}57}_{(p_1'''')}\,x^2 - 1{,}82 - 2{,}48 - 2{,}15 - 1{,}63 + 0{,}51 - 0{,}54 - 1{,}04$ |

und verfahre mit ihr wie unter (q) angegeben ist. Es wird:

$$(p_1) = 22{,}4$$

und

$$(\underline{S}) = 1 - 0{,}281x + 0{,}688x^2 - 1{,}130x^3 - 0{,}872x^4 - \cdots$$

Da der letzte Rest der Kettendivision verhältnismäßig groß ist, so steht zu erwarten, daß die aus derselben sich ergebenden Perioden wenig auf Genauigkeit Anspruch machen können.

Mit

$$(p_1') = -1{,}609\,; \qquad (q_1) = +0{,}281$$
$$(p_1'') = +0{,}362\,; \qquad (q_1') = +0{,}477$$
$$(p_1''') = +7{,}02\,; \qquad (q_1'') = -3{,}97$$
$$(q_1''') = +2{,}79$$

findet man aus (54)

$$(\psi_1'') = 1 + [(q_1'') + (q_1''')]\cdot y + [(q_1'')\cdot(q_1''') + (p_1''')]\,y^2$$
$$(q_1'')\cdot(q_1''') + (p_1''') = -11{,}07 + 7{,}02 = -4{,}05$$
$$(\psi_1'') = 1 - 1{,}18\,y - 4{,}05\,y^2$$

$$(\psi_1''') = [1 + (q_1')\,y]\cdot(\psi_1'') + (p_1')\,y^2\,[1 + (q_1''')\,y]$$
$$y \mid +0{,}48 - 1{,}18 = -0{,}70$$
$$y^2 \mid -4{,}05 - 1{,}18\cdot + 0{,}477 + 0{,}36 = -3{,}69 - 0{,}56 = -4{,}25$$
$$y^3 \mid -4{,}05\cdot + 0{,}477 + 0{,}362\cdot + 2{,}79 = -1{,}93 + 1{,}00 = -0{,}93$$
$$(\psi_1''') = 1 - 0{,}70\,y - 4{,}25\,y^2 - 0{,}93\,y^3$$

$$(\psi_1'''') = [1 + (q_1)\,y]\cdot(\psi_1''') + (p_1')\,y^2\,(\psi_1''')$$
$$y \mid -0{,}70 + 0{,}28 = -0{,}42$$
$$y^2 \mid -4{,}25 + 0{,}281\cdot - 0{,}70 - 1{,}61 = -5{,}86 - 0{,}20 = -6{,}06$$
$$y^3 \mid -0{,}93 - 4{,}25\cdot + 0{,}281 - 1{,}609\cdot - 1{,}18 = -0{,}93 - 1{,}19 + 1{,}90 = -0{,}22$$
$$y^4 + 0{,}281\cdot - 0{,}93 - 1{,}609\cdot - 4{,}05 = -0{,}26 + 6{,}52 = +6{,}26$$
$$(\psi_1'''') = 1 - 0{,}42\,y - 6{,}06\,y^2 - 0{,}22\,y^3 + 6{,}26\,y^4$$

Hieraus

$$(\underline{x})^4 - 0{,}42(\underline{x})^3 - 6{,}06(\underline{x})^2 - 0{,}22(\underline{x}) + 6{,}26 = 0\,.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(\underline{x})_1 = (\omega_1) = -1{,}32$$
$$(\underline{x})_2 = (\varrho_1) = +2{,}487$$
$$(\underline{x})_3 = (\mu_1) = +1{,}058$$
$$(\underline{x})_4 = (\nu_1) = -1{,}81$$

damit

$$\cos\alpha = \frac{(\omega_1)}{2} = -0{,}66$$
$$\cos\beta = \frac{(\varrho_1)}{2} = +1{,}244$$
$$\cos\gamma = \frac{(\mu_1)}{2} = +0{,}529$$
$$\cos\delta = \frac{(\nu_1)}{2} = -0{,}91$$

und

$$\alpha = 131^\circ 18' ; \qquad P_\alpha = 8{,}23^a$$
$$\gamma = 58^\circ 4' \quad ; \qquad P_\gamma = 18{,}61^a$$
$$\delta = 155^\circ 30' ; \qquad P_\delta = 6{,}95^a$$

[vgl. (y)]

Legt man für die Berechnung der Phasenwinkel und der Amplituden sowohl bei Anwendung der 2. als auch bei der 1. Methode die aus der 3. Kettendivision berechneten Periodenwinkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ zugrunde, so findet man nach der

**1. Methode**

durch Vergleich von (55) und (57)

$$\frac{p \cdot \psi'''}{\psi''''} = \frac{F}{1 - \omega y} + \frac{G}{1 - \varrho y} + \frac{H}{1 - \mu y} + \frac{I}{1 - \nu y}.$$

Setzt man $y = \frac{1}{z}$ und führt man die gefundenen Werte ein, so ergibt sich nach einer einfachen Umformung

$$\frac{117{,}8\,(z^3 + 0{,}3299 z^2 - 1{,}9588 z + 1{,}1740)}{z^4 - 1{,}2338 z^3 - 3{,}2546 z^2 + 3{,}1624 z + 0{,}4880} =$$
$$\frac{F}{z + 0{,}1363} + \frac{G}{z - 2{,}0105} + \frac{H}{z - 1{,}0520} + \frac{I}{z + 1{,}6924}.$$

Für $z = \omega = -0{,}1363$ ergibt sich hieraus, wenn zuvor beide Seiten der Gleichung mit $z - \omega$ multipliziert werden

$$F = \frac{+ 117{,}8 \cdot (1{,}1740 + 0{,}2670 + 0{,}0061 - 0{,}0025)}{- 2{,}1468 \cdot - 1{,}1883 \cdot + 1{,}5561}$$

oder

$$F = \frac{117{,}8 \cdot 1{,}4446}{2{,}1468 \cdot 1{,}1883 \cdot 1{,}5561} = + \mathbf{42{,}9}.$$

[Dabei wurde verwendet: $\psi'''' = (z - \omega)(z - \varrho)(z - \mu)(z - \nu)$].

Analog erhält man für $z = \varrho = + 2{,}0105$

$$G = \frac{+ 117{,}8\,(1{,}17 - 3{,}94 + 1{,}33 + 8{,}13)}{+ 2{,}15 \cdot + 0{,}96 \cdot + 3{,}70}$$

oder

$$G = \frac{117{,}8 \cdot 6{,}69}{2{,}15 \cdot 0{,}96 \cdot 3{,}70} = + \mathbf{103{,}2}$$

für $z = \mu = +1{,}520$

$$H = \frac{117{,}8\,(1{,}17 - 2{,}06 + 0{,}37 + 1{,}17)}{+1{,}1883 \cdot -0{,}9585 \cdot +2{,}7444}$$

$$\boldsymbol{H} = \frac{117{,}8 \cdot 0{,}65}{-1{,}1883 \cdot 0{,}9585 \cdot 2{,}7444} = \mathbf{-24{,}5}$$

und für $z = \nu = -1{,}6924$

$$I = \frac{117{,}8\,(1{,}17 + 3{,}32 + 0{,}95 - 4{,}85)}{-1{,}5561 \cdot -3{,}7029 \cdot -2{,}7444}$$

$$\boldsymbol{I} = \frac{117{,}8 \cdot 0{,}59}{-1{,}5561 \cdot 3{,}7029 \cdot 2{,}7444} = \mathbf{-4{,}4}\,.$$

Aus

$$\frac{(p)\ (\psi''')}{(\psi'''')} = \frac{(F)}{1-(\omega)y} + \frac{(G)}{1-(\varrho)y} + \frac{(H)}{1-(\mu)y} + \frac{(I)}{1-(\nu)y}$$

ergibt sich durch die Transformation $y = \frac{1}{z}$ und Einführung der Zahlenwerte ähnlich wie oben

$$\frac{71{,}8\,[(z)^3 + 0{,}023(z)^2 - 4{,}315(z) - 2{,}963]}{[(z) + 0{,}131] \cdot [(z) - 2{,}334] \cdot [(z) + 0{,}927] \cdot [(z) + 1{,}959]} =$$

$$\frac{(F)}{(z) + 0{,}131} + \frac{(G)}{(z) - 2{,}334} + \frac{(H)}{(z) + 0{,}927} + \frac{(I)}{(z) + 1{,}959}\,.$$

Hieraus für $(z) = -0{,}131$ wie oben

$$(F) = \frac{71{,}8\,(-2{,}963 + 0{,}565 - 0{,}002)}{-2{,}465 \cdot +0{,}796 \cdot +1{,}826}$$

$$(\boldsymbol{F}) = \frac{71{,}8 \cdot 2{,}4}{2{,}465 \cdot 0{,}796 \cdot 1{,}826} = \mathbf{+48{,}1}$$

für $(z) = +2{,}334$

$$(\boldsymbol{G}) = \frac{\overbrace{71{,}8\,(-2{,}96 - 10{,}07 + 0{,}13 + 12{,}69)}^{-0{,}21}}{+2{,}465 \cdot +3{,}261 \cdot +4{,}291} = \mathbf{-0{,}4}$$

für $(z) = -0{,}927$

$$(\boldsymbol{H}) = \frac{\overbrace{71{,}8\,(-2{,}96 + 4{,}00 + 0{,}02 - 0{,}80)}^{+0{,}26}}{-0{,}796 \cdot -3{,}261 \cdot +103} = \mathbf{+7{,}0}$$

und für $(z) = -1{,}959$

$$(I) = \frac{71{,}8 \cdot (-2{,}96 \overbrace{+ 8{,}45 + 0{,}09}^{-1{,}91} - 7{,}49)}{-1{,}826 \cdot -4{,}291 \cdot -1{,}030} = +\mathbf{17{,}0}$$

aus (67) ergibt sich jetzt

$$\operatorname{tg} a = \frac{91}{48{,}1 \operatorname{ctg} 47^\circ 52' - 42{,}9 \operatorname{tg} 47^\circ 52'} = \frac{91}{43{,}5 - 47{,}4} = \frac{91}{-3{,}9}$$

$$\boldsymbol{a = 92^\circ 26'}$$

aus (62)

$$A = \frac{91}{2 \sin a}$$

$$\boldsymbol{A = 45{,}5}\,.$$

Aus (64) folgt sofort

$$\mathrm{B} \sin b = \frac{103{,}2 - 0{,}4}{2} = \frac{102{,}8}{2}$$

$$\boldsymbol{B \sin b = 51{,}4} \qquad (\beta = 0^\circ)\,.$$

Ähnlich wie man aus Formel (67) $a$ erhält, ergibt sich $c$ aus

$$\operatorname{tg} c = \frac{-17{,}5}{7{,}0 \operatorname{ctg} 25^\circ 53' + 24{,}5 \operatorname{tg} 25^\circ 53'} = \frac{-17{,}5}{14{,}4 + 11{,}9} = \frac{-17{,}5}{26{,}3}\,.$$

Unter Voraussetzung positiver Amplituden ist $\sin c$ wegen (62) negativ und es wird

$$\boldsymbol{c = 326^\circ 19'}\,.$$

Weiter wird

$$\boldsymbol{C} = \frac{-8{,}75}{\sin c} = \mathbf{+15{,}9}\,.$$

Endlich

$$\operatorname{tg} d = \frac{12{,}6}{17{,}0 \operatorname{ctg} 85^\circ 53' + 4{,}4 \operatorname{tg} 85^\circ 53'} = \frac{12{,}6}{1{,}2 + 61{,}1} = \frac{12{,}6}{62{,}3}$$

$$\boldsymbol{d = 11^\circ 25'}$$

und

$$\boldsymbol{D} = \frac{12{,}6}{2 \sin d} = \mathbf{31{,}8}\,.$$

Ich erhalte somit nach der 1. Methode folgende Formel (1)

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{(m)} = 51{,}4 &+ 45{,}5 \sin(\ 92^\circ 26' + m \cdot\ 95^\circ 43') \\ &+ 31{,}8 \sin(\ 11^\circ 25' + m \cdot 171^\circ 47') \\ &+ 15{,}9 \sin(326^\circ 19' + m \cdot\ 51^\circ 45')\,. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man für $m = 0, 1, 2, 3, 4$ nacheinander

$$\begin{aligned}
T &= 51{,}4 + 45{,}5 + 6{,}3 - 8{,}8 = 94{,}4 \text{ (statt } 94{,}8) \\
T' &= 51{,}4 - 6{,}5 - 1{,}8 + 4{,}9 = 48{,}0 \text{ ( „ } 45{,}4) \\
T'' &= 51{,}4 - 44{,}2 - 2{,}8 + 14{,}9 = 19{,}3 \text{ ( „ } 14{,}7) \\
T''' &= 51{,}4 + 15{,}2 + 7{,}3 + 13{,}5 = 87{,}4 \text{ ( „ } 78{,}6) \\
T'''' &= 51{,}4 + 41{,}2 + 11{,}6 + 1{,}9 = 82{,}0 \text{ ( „ } 99{,}7)
\end{aligned}$$

Eine etwas bessere Übereinstimmung liefert die Formel der

### 2. Methode.

Der Grund hierfür liegt zum größten Teil in den kleineren Resten der hier verwendeten Kettendivisionen. Es ist nämlich sowohl

$$|p_1''''| < |p''''| \text{ als auch } |(p_1'''')| < |(p'''')|.$$

Durch die Transformation $y = \frac{1}{\underline{z}}$ und Einführung der Zahlenwerte findet man aus einem Vergleich von (71) und (73) wie bei der 1. Methode

$$\frac{94{,}8\,(\underline{z}^3 - 0{,}338\,\underline{z}^2 - 2{,}573\,\underline{z}^2 + 2{,}237)}{(\underline{z} + 0{,}199)\,(\underline{z} - 2{,}001)\,(\underline{z} - 1{,}238)\,(\underline{z} + 1{,}980)} =$$

$$\frac{F_1}{\underline{z} + 0{,}199} + \frac{G_1}{\underline{z} - 2{,}001} + \frac{H_1}{\underline{z} - 1{,}238} + \frac{I_1}{\underline{z} + 1{,}980}$$

und hieraus

$$F_1 = \frac{94{,}8\,(2{,}237 \overbrace{+ 0{,}513 - 0{,}013}^{+\,2{,}729} - 0{,}008)}{-\,2{,}200 \cdot -\,1{,}423 \cdot +\,1{,}780} = +\,\mathbf{46{,}4}$$

$$G_1 = \frac{94{,}8\,(2{,}24 \overbrace{- 5{,}15 - 1{,}35}^{+\,3{,}75} + 8{,}01)}{2{,}200 \cdot +\,0{,}762 \cdot +\,3{,}980} = +\,\mathbf{53{,}3}$$

$$H_1 = \frac{94{,}8\,(2{,}24 \overbrace{- 3{,}19 - 0{,}52}^{+\,0{,}43} + 1{,}90)}{1{,}437 \cdot -\,0{,}763 \cdot +\,3{,}218} = -\,\mathbf{11{,}6}$$

$$I_1 = \frac{94{,}8\,(2{,}24 \overbrace{+ 5{,}10 - 1{,}33}^{-\,1{,}75} - 7{,}76)}{-\,1{,}780 \cdot -\,3{,}980 \cdot -\,3{,}218} = +\,\mathbf{7{,}3}$$

Analog ergeben sich aus

$$\frac{22{,}4\,[(\underline{x})^3 - 0{,}70\,(\underline{x})^2 - 4{,}25\,(\underline{x}) - 0{,}93}{[(\underline{x}) + 1{,}32]\cdot[(\underline{x}) - 2{,}49]\cdot[(\underline{x}) - 1{,}06]\cdot[(\underline{x}) + 1{,}81]} =$$

$$\frac{(F_1)}{(\underline{x}) + 1{,}32} + \frac{(G_1)}{(\underline{x}) - 2{,}49} + \frac{(H_1)}{(\underline{x}) - 1{,}06} + \frac{(I_1)}{(\underline{x}) + 1{,}81}$$

die Größen

$$(F_1) = \frac{22{,}4\,(-0{,}93 \overbrace{+ 5{,}61}^{+1{,}16} \overbrace{- 1{,}22 - 2{,}30}^{-0{,}42})}{-3{,}81\cdot -2{,}38\cdot +0{,}49} = +\mathbf{5{,}8}$$

$$(G_1) = \frac{22{,}4\,(-0{,}93 \overbrace{- 10{,}58}^{-5{,}02} \overbrace{- 4{,}34 + 15{,}43}^{+1{,}46})}{+3{,}81\cdot +1{,}43\cdot +4{,}30} = -\mathbf{0{,}4}$$

$$(H_1) = \frac{22{,}4\,(-0{,}93 \overbrace{- 4{,}49}^{-5{,}02} \overbrace{- 0{,}78 + 1{,}18}^{+0{,}40})}{+2{,}38\cdot -1{,}43\cdot +2{,}87} = +\mathbf{11{,}5}$$

$$(I_1) = \frac{22{,}4\,(-0{,}93 \overbrace{+ 7{,}69}^{+1{,}46} \overbrace{- 2{,}29 - 5{,}93}^{-0{,}53})}{-0{,}49\cdot -4{,}30\cdot -2{,}87} = +\mathbf{5{,}4}.$$

Mit Hilfe dieser Werte findet man aus (82)

$$\operatorname{tg} a = \frac{2\cdot 46{,}4\,\sin 95^\circ 43'}{5{,}8}$$

$$\boldsymbol{a = 86^\circ 24'}$$

und aus (77)

$$\boldsymbol{A} = \frac{46{,}4}{\sin a} = \mathbf{46{,}5}.$$

Wegen $\beta = 0^\circ$ folgt aus (79) sofort

$$\boldsymbol{B \sin b = 53{,}3}.$$

Weiter wird aus

$$\operatorname{tg} c = \frac{2\cdot -11{,}6\,\sin 51^\circ 45'}{11{,}5}$$

$$\boldsymbol{c = 302^\circ 22'}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{-11{,}6}{\sin c} = +\mathbf{13{,}8}$$

$$\operatorname{tg} d = \frac{2 \cdot 7{,}3 \sin 8^\circ 13'}{5{,}4}$$

$$\boldsymbol{d = 21^\circ 2'}$$

$$\boldsymbol{D = \frac{7{,}3}{\sin d} = 20{,}3}.$$

Damit heißt die gefundene Formel

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^{(m)} = 53{,}3 &+ 46{,}5 \sin(\ 86^\circ 24' + m \cdot\ 95^\circ 43') \\ &+ 20{,}3 \sin(\ 21^\circ\ 2' + m \cdot 171^\circ 47') \\ &+ 13{,}8 \sin(302^\circ 22' + m \cdot\ 51^\circ 45'). \end{aligned}$$

Für $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ ergibt sich nacheinander

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} &= 53{,}3 + 45{,}4 + 7{,}3 - 11{,}7 = 94{,}3 \text{ (statt } 94{,}8) \\
\mathrm{T}' &= 53{,}3 - 1{,}7 - 4{,}5 - 1{,}4 = 45{,}7 \text{ (} \text{„} \text{ } 45{,}4) \\
\mathrm{T}'' &= 53{,}3 - 46{,}1 + 1{,}6 + 9{,}9 = 18{,}7 \text{ (} \text{„} \text{ } 14{,}7) \\
\mathrm{T}''' &= 53{,}3 + 10{,}9 + 1{,}3 + 13{,}5 = 79{,}0 \text{ (} \text{„} \text{ } 78{,}6) \\
\mathrm{T}'''' &= 53{,}3 + 43{,}9 - 4{,}2 + 7{,}0 = 99{,}9 \text{ (} \text{„} \text{ } 99{,}7) \\
\mathrm{T}^{\mathrm{V}} &= 53{,}3 - 19{,}6 + 7{,}0 - 5{,}0 = 35{,}7 \text{ (} \text{„} \text{ } 18{,}9) \\
\mathrm{T}^{\mathrm{VI}} &= 53{,}3 - 40{,}0 - 9{,}6 - 13{,}2 = -9{,}5 \text{ (} \text{„} + 3{,}9) \\
\mathrm{T}^{\mathrm{VII}} &= 53{,}3 + 28{,}6 + 12{,}1 - 11{,}4 = 82{,}6 \text{ (} \text{„} \text{ } 54{,}4) \\
\mathrm{T}^{\mathrm{VIII}} &= 53{,}3 + 34{,}5 - 14{,}3 - 0{,}9 = 72{,}6 \text{ (} \text{„} \text{ } 63{,}3).
\end{aligned}$$

Die erheblichen Abweichungen in den Werten $\mathrm{T}^{\mathrm{V}}$ bis $\mathrm{T}^{\mathrm{VIII}}$ rühren hauptsächlich von den Periodenwinkeln her, deren Fehler, so klein sie auch sind, durch die Verfünf- bis Verachtfachung immer mehr sich geltend machen.

Versucht man die Formel für die Berechnung der Zwischenwerte anzuwenden, so versagt sie.

So erhält man für $m = \frac{1}{3}$

$$\mathrm{T}^{(\frac{1}{3})} = 53{,}3 + 41{,}0 + 19{,}9 - 8{,}9 = 105{,}3 \text{ (statt } 77{,}7).$$

Das ist auch dadurch nicht gut zu machen, daß man etwa in der Formel statt $\delta = 171^\circ 47'$ den Winkel $\delta_1 = 360^\circ + 171^\circ 47'$ setzt.

Dadurch erhielte man allerdings für $m = \frac{1}{3}$

$$\mathrm{T}^{(\frac{1}{3})} = 53{,}3 + 41{,}0 - 6{,}4 - 8{,}9 = +79{,}0 \text{ (statt } 77{,}7).$$

Aber bei demselben $\delta_1$ ergibt sich für $m = \frac{2}{3}$

$$\mathrm{T}^{(\frac{2}{3})} = 53{,}3 + 23{,}1 - 5{,}4 + 5{,}4 = 76{,}4 \text{ (statt } 61{,}1)$$

und für $m = \frac{4}{3}$

$$\mathrm{T}^{(\frac{4}{3})} = 53{,}3 - 26{,}0 - 19{,}1 + 2{,}7 = 10{,}9 \text{ (statt } 45{,}2).$$

Ist somit die Formel für die Berechnung der Zwischenwerte nicht anwendbar, so wäre es, wie man jetzt sieht, vorteilhafter gewesen (man käme dadurch den Zahlen näher!), mit den Mittelwerten von je 3 aufeinanderfolgenden Jahresmittelzahlen zu rechnen.

Diese Erkenntnis veranlaßte mich, die Rechnung noch einmal durchzuführen. Ich bildete nach der üblichen Methode zu den ausgeglichenen Relativzahlen der Jahre 1839 bis 1882 von 3 zu 3 Jahren die Mittel. So erhielt ich für die Jahre 1859, 1860, 1861 die mittlere Relativzahl (T) durch arithmetische Mittelbildung aus den arithmetischen Mitteln der Relativzahlen zu 1859 und 1860, und zu 1860 und 1861.

$$T = \frac{\frac{90{,}3 + 94{,}8}{2} + \frac{94{,}8 + 77{,}7}{2}}{2} = \frac{185{,}1 + 172{,}5}{4} = \frac{357{,}6}{4} = 89{,}4\,.$$

Von diesen so erhaltenen Mittelrelativzahlen von 3 zu 3 Jahren wurde, um die weitere Rechnung zu vereinfachen, noch das bereits ziemlich genau bestimmte konstante Glied „53,3“ der zuletzt erhaltenen Formel in Abzug gebracht. Dann stand zu erwarten, daß die nunmehr vorzunehmenden Kettendivisionen bereits nach „drei“maliger (statt nach „vier“maliger) Anwendnng des Verfahrens aufgehen oder einen kleinen zu vernachlässigenden Rest liefern) In der Tat war dies bei Anwendung der 2. Methode mit Reihe (20 der Fall.

$$S_3 = p_1 \underline{S} = +\,36{,}1 \underbrace{-\,30{,}4}_{p_1} x - 67{,}1x^2 + 37{,}2x^3 + \\ + 99{,}4x^4 - 44{,}8x^5 - 75{,}6x^6 + 26{,}0x^7.$$

| | $q_1$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1 + x^2 \overbrace{-\,0{,}842}^{q_1} x$ |
| 1. Divisor $\underline{S}$ | $1 - 0{,}842x - 1{,}860x^2 + 1{,}030 + 2{,}752 - 1{,}241 - 2{,}094 + 0{,}720$ |
| 1. Dividend | $1 \qquad - 1{,}000x^2$ |
| $-(1 + x^2)\cdot \underline{S}$ | $-1 + 0{,}842x + 0{,}860x^2 - 0{,}188 - 0{,}892 + 0{,}211 - 0{,}658 + 0{,}521$ |
| add. | $* \quad + 0{,}842x - 0{,}140x^2 -$ |
| $-q_1 x \cdot \underline{S}$ | $- 0{,}842x + 0{,}709x^2 + 1{,}566 - 0{,}868 - 2{,}319 + 1{,}046 + 1{,}762$ |
| add.: $p_1' \cdot x^2 \cdot \underline{S'}$ | $* \quad \underbrace{+\,0{,}569}_{q_1'} x^2 + 1{,}378 - 1{,}760 - 2{,}108 + 0{,}388 + 2{,}283$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\overbrace{q_1'}$ | | | |
| 2. Quotient | $1 + x^2 - 3{,}263x$ | | | | |
| 2. Divisor: $S'$ | $1 + 2{,}421x - 3{,}092x^2 -$ | $3{,}705 +$ | $0{,}682 + 4{,}015$ | | |
| 2. Dividend: $S$ | $1 - 0{,}842x - 1{,}860x^2 +$ | $1{,}030 +$ | $2{,}752 - 1{,}241$ | | |
| $-(1 + x^2) \cdot S'$ | $-1 - 2{,}421x + 2{,}092x^2 +$ | $1{,}284 +$ | $2{,}410 - 0{,}310$ | | |
| add. | $* \quad - 3{,}263x + 0{,}232x^2 +$ | $2{,}314 +$ | $5{,}162 - 1{,}551$ | | |
| $-q_1' x \cdot \underline{S'}$ | $+ 3{,}263x + 7{,}900x^2 -$ | $10{,}089 -$ | $12{,}089 + 2{,}225$ | | |
| add.: $p_1'' \cdot x^2 \cdot \underline{S''}$ | $* \quad \underbrace{+ 8{,}132}_{p_1''} x^2 -$ | $7{,}775 -$ | $6{,}927 + 0{,}674$ | | |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\overbrace{q_1''}$ | | | |
| 3. Quotient | $1 + x^2 \overbrace{+ 3{,}377}\, x$ | | | | |
| 3. Divisor: $\underline{S''}$ | $1 - 0{,}956x - 0{,}852\, x^2 +$ | $0{,}083$ | | | |
| 3. Dividend: $\underline{S'}$ | $1 + 2{,}421x - 3{,}092\, x^2 -$ | $3{,}705$ | | | |
| $-(1 + x^2) \cdot \underline{S''}$ | $-1 + 0{,}956x - 0{,}148\, x^2 +$ | $0{,}873$ | | | |
| add. | $* \quad + 3{,}377x - 3{,}240\, x^2 -$ | $2{,}832$ | | | |
| $-q_1'' x \cdot \underline{S''}$ | $- 3{,}377x + 3{,}228\, x^2 +$ | $2{,}877$ | | | |
| add.: $p_1''' \cdot x^2 \cdot \underline{S'''}$ | $* \quad \underbrace{- 0{,}012}_{p_1'''} x^2 +$ | $0{,}045$ | | | |

Nun ergab sich wie früher die Gleichung

$$x^3 + 0{,}956x^2 - 2{,}222x - 0{,}510 = 0$$

und hieraus

$$\begin{array}{lll} z_1 = -0{,}214; & \alpha = 96^\circ\ 9'; & P_\alpha = 11{,}24^a \\ z_2 = +1{,}216; & \gamma = 52^\circ\ 33'; & P_\gamma = 20{,}55^a \\ z_3 = -1{,}958; & \delta = 168^\circ\ 14'; & P_\delta = 6{,}42^a. \end{array}$$

Diese Perioden stimmen mit den schon ermittelten sehr gut überein.

Die Kettendivision mit Reihe (21) liefert schon nach 2 maliger Anwendung des Verfahrens einen kleinen zu vernachlässigenden Rest. Führt man mit ihm die Division weiter fort, so ergibt sich ein neuer Rest mit verhältnismäßig großen Koeffizienten. Die Rechnung liefert dann andere Perioden, die von den schon bestimmten stark abweichen.

Da in der folgenden Kettendivision $(p_1'')$ kleiner ist als die übrigen Koeffizienten des letzten ($2^{\text{ten}}$) Restes, so lag es nahe, $(p_1'')$ zu vernachlässigen und mit den übrigen Gliedern des Restes $(\underline{S''})$ ein etwas modifiziertes Divisionsverfahren vorzunehmen. Aber auch dieser

Versuch war erfolglos. Es ergaben sich die am besten mit den schon bestimmten Perioden übereinstimmenden aus der Rechnung mit nur zweimaliger Anwendung des Divisionsverfahrens.

$$S_4=(p_1)(\underline{S})=\underbrace{22{,}4}_{(p_1)}-4{,}7x+19{,}2x^2-15{,}4x^3-15{,}4x^4-17{,}8x^5-33{,}4x^6.$$

| | $(q_1)$ |
|---|---|
| 1. Quotient | $1+x^2+\overbrace{0{,}210}x$ |
| 1. Divisor $(\underline{S})$ | $1-0{,}210x+0{,}857x^2-0{,}688-0{,}688-0{,}794-1{,}491$ |
| 1. Dividend | $1$ |
| $-(1+x^2)\cdot(\underline{S})$ | $-1+0{,}210x-1{,}857x^2+0{,}898-0{,}169+1{,}482+2{,}179$ |
| add. | * |
| $-(q_1)\,x\cdot(\underline{S})$ | $-0{,}210x+0{,}044x^2-0{,}180+0{,}144+0{,}144+0{,}167$ |
| add.: $(p_1')\cdot x^2\cdot(\underline{S'})$ | $*\quad\underbrace{-1{,}813}_{(p_1')}x^2+0{,}718-0{,}025+1{,}626+2{,}346$ |

| | $(q_1')$ |
|---|---|
| 2. Quotient | $1+x^2+\overbrace{0{,}186}x$ |
| 2. Divisor $(\underline{S'})$ | $1-0{,}396\,x+0{,}014\,x^2-0{,}896-1{,}293$ |
| 2. Dividend $(\underline{S})$ | $1-0{,}210\,x+0{,}857\,x^2-0{,}688-0{,}688$ |
| $-(1+x^2)\cdot(\underline{S'})$ | $-1+0{,}396\,x-1{,}014\,x^2+1{,}292+1{,}279$ |
| add. | $*\quad+0{,}186\,x-0{,}157\,x^2+1{,}604+0{,}591$ |
| $-(q_1')\,x\cdot(\underline{S'})$ | $-0{,}186\,x+0{,}074\,x^2-0{,}003+0{,}167$ |
| add.: $(p_1''\cdot x^2\cdot(\underline{S''})$ | $*\quad\underbrace{-0{,}083}_{(p_1'')}\,x^2+0{,}601+0{,}758$ |

Damit heißt die Bestimmungsgleichung für die Kosinus der Periodenwinkel

$$x^2+0{,}396\;x-1{,}774=0$$

$$x_1=+1{,}149\,;\qquad \gamma=54^\circ\,56'\,;\qquad P_\gamma=19{,}67^a$$
$$x_2=-1{,}545\,;\quad 180^\circ-\delta=39^\circ\,25'\,;\qquad P_\delta=\;7{,}69^a.$$

Die Rechnung ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\mathbf{T^{(m)}=}&\mathbf{+53{,}3}\\&\mathbf{+41{,}4\sin(\;90^\circ\;\;+m\cdot\;96^\circ\,9')}\\&\mathbf{+28{,}1\sin(\;\;9^\circ\,38'+m\cdot168^\circ\,14')}\\&\mathbf{+12{,}3\sin(304^\circ\,41'+m\cdot\;52^\circ\,33').}\end{aligned}$$

Hieraus

$$
\begin{aligned}
^{IV}T &= 53{,}3 + 37{,}6 + 23{,}5 + 12{,}3 = + 126{,}7 \text{ (statt } + 57{,}4)\\
'''T &= 53{,}3 + 13{,}1 - 19{,}8 + 6{,}7 = + 53{,}3 \text{ ( „ } + 9{,}0)\\
''T &= 53{,}3 - 40{,}5 + 15{,}4 - 4{,}1 = + 24{,}1 \text{ ( „ } + 22{,}1)\\
'T &= 53{,}3 - 4{,}4 - 10{,}2 - 11{,}7 = + 27{,}0 \text{ ( „ } + 26{,}9)\\
T &= 53{,}3 + 41{,}4 + 4{,}7 - 10{,}1 = + 89{,}3 \text{ ( „ } + 89{,}4)\\
T' &= 53{,}3 - 4{,}4 + 1{,}0 - 0{,}6 = + 49{,}3 \text{ ( „ } + 49{,}3)\\
T'' &= 53{,}3 - 40{,}5 - 6{,}8 + 9{,}4 = + 15{,}4 \text{ ( „ } + 17{,}4)\\
T''' &= 53{,}3 + 13{,}1 + 12{,}2 + 12{,}0 = + 90{,}6 \text{ ( „ } + 81{,}5)\\
T^{IV} &= 53{;}3 + 37{,}6 - 17{,}1 + 5{,}2 = + 79{,}0 \text{ ( „ } + 95{,}3)\,.
\end{aligned}
$$

Diese Formel liefert nur im Intervall $+2$ bis $-2$ gute Übereinstimmung.

Zum Schlusse habe ich noch in der folgenden Tabelle eine Übersicht der aus den einzelnen Kettendivisionen gefundenen Perioden gegeben. Der Anspruch auf Richtigkeit nimmt von einer Zeile zur andern ab, da der absolute Betrag des 1 Gliedes des letzten Restes in der Kettendivision immer größer wird.

| | $P_\alpha$ | $\cos_\beta$ | $P_\gamma$ | $P_\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lvert p_1''' \rvert = 0{,}012$ | **11,24$^a$** | 1,0000 | **20,55$^a$** | **6,42$^a$** |
| $\lvert p_1''' \rvert = 0{,}102$ | 11,28 | 1,0004 | 20,87 | 6,29 |
| $\lvert p'''' \rvert = 0{,}418$ | 11,50 | 1,005 | 18,54 | 7,31 |
| $\lvert (p_1'''') \rvert = 1{,}57$ | { 8,23} | 1,244 | 18,61 | 6,95 |
| $\lvert (p'''') \rvert = 1{,}795$ | 11,52 | 1,167 | { 9,18} | 6,42. |

Die aus der Reihe (20), unter Verwendung der gemittelten Jahresrelativzahlen zuletzt erhaltenen Perioden sind die richtigsten (1. Zeile). Wie man sieht, nähert sich $P_\gamma$ immer mehr dem doppelten Betrag der schon seither ziemlich sicher bekannten 11jährigen Periode, ohne ihn jedoch vollständig zu erreichen; denn selbst wenn $p'''' = 0$, können sich die Perioden wohl noch um einige Einheiten der 2. Dezimale ändern, nie aber um 2 Ganze. (Das kann aus der Tabelle, insbesondere aus der guten Übereinstimmung der Perioden der ersten und der zweiten Zeile, trotz des verhältnismäßig großen Unterschiedes $\lvert p_1'''' \rvert - \lvert p_1''' \rvert$, entnommen werden.)

$P_\gamma$ ist also etwas kleiner als $2P_\alpha$; $(\mathbf{P}_\gamma \sim 21^a < 2 \cdot 11^a)$.

Ebenso kann man schließen, daß $P_\delta$ etwas größer als die Hälfte von $P_\alpha$ ist;

$$(\mathbf{P}_\delta \sim 6^a > \tfrac{1}{2} \cdot 11^a)$$

$\cos\beta \sim 1$ deutet auf die Existenz eines konstanten Gliedes hin ($P_\beta = \infty$) $\cos\beta = 1{,}0000$ in der 1. Zeile ist kein Wert, der sich durch die Rechnung ergibt, sondern er wird durch das Abziehen des gefundenen konstanten Gliedes (53,3) vorausgesetzt; doch ist seine Existenz erwiesen.

Bei der 4. Kettendivision (4. Zeile) konzentriert sich der Fehler, der durch die großen letzten Restkoeffizienten entsteht, hauptsächlichst auf $P_\alpha$; ebenso bei der 2. Kettendivision (5. Zeile) hauptsächlichst auf $P_\gamma$.

Herr S. Hirayama findet durch „harmonische Analyse“ (Berichte der Mathematischen Gesellschaft in Tokio 1907, Seite 160) eine Formel, die wenigstens in ihrem konstanten Glied und der (größten) Amplitude des zur 11jährigen Periode gehörigen Gliedes mit der meinigen ziemlich übereinstimmt. Die Formel heißt

$$
\begin{aligned}
y = 47{,}8 &+ 43{,}8 \cos(\ 6\,nt - 160{,}2) && \text{Periode } 11{,}13^a \\
&+ 11{,}8 \cos(12\,nt - 256{,}6) && 5{,}57^a \\
&+ \ 8{,}0 \cos(\ 8\,nt - 169{,}9) && 8{,}35^a \\
&+ \ 7{,}1 \cos(\ 4\,nt - \ 62{,}5) && 16{,}70^a \\
&+ \ 5{,}9 \cos(\ 5\,nt - 218{,}2) && 13{,}36^a
\end{aligned}
$$

$n = (5{,}3908)^\circ$; Ausgangsjahr: 1800

„t“ ist die Zeit in Jahren.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.